Devoir de Mathématiques numéro 5

Exercice 1

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad (A|B) = \mathrm{Tr}\,(A^T B)$$

Soit $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\,(M) = 0\}$.

1) Déterminez la dimension de $F^\perp$, puis une base orthonormée de $F^\perp$.

2) En déduire une expression de $p_F(M)$, la projection orthogonale d'une matrice $M \in E$ sur F.

3) Donner $d(J, F)$, où J est la matrice de taille n dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 2 (Polynômes de Legendre — exercice 10)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Préliminaire : Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^n\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$. On distinguera les cas n pairs et n impairs.

2) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.

3) Application : minimiser une intégrale.

a) Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) En déduire la projection de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

c) Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2\,\mathrm{d}t$. On commencera par écrire le problème algébriquement.

4) (bonus) Une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de degrés échelonnés si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \deg P_n < \deg P_{n+1}$$

Soit $(P_0, P_1, \dots)$ une base orthonormée de E de degrés échelonnés. On admet que, dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que toutes les racines de P_n sont réelles et dans $]-1, 1[$.
<u>Indication</u> : *Si on note* $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ *les racines de* P_n *dans* $]-1,1[$ *comptées avec multiplicité, et* $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$*, on pourra regarder* $(Q|P_n)$.

c) Prouver que ces racines sont simples.

Exercice 3 (exercice 13)

Soit E un espace euclidien, et $f \in \mathscr{O}(E)$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E)^\perp$.

2) En déduire que si $(f - \mathrm{id}_E)^2 = 0$, alors $f = \mathrm{id}_E$.