Devoir de Mathématiques numéro 5

Correction

Exercice 1

Partie 1

1) a) La matrice A est symétrique : ${}^tA = {}^t({}^tMM) = {}^tM^{tt}M = A$. Donc le théorème spectrale nous dit qu'elle est diagonalisable, avec une matrice de passage orthogonale.

b) Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ,

$$\|MX\|^2 = {}^t(MX)MX = {}^tX^tMMX = {}^tX(AX) = \lambda^tXX = \lambda\|X\|^2$$

Comme $\|MX\|^2 \geqslant 0$ et $\|X\|^2 > 0$, $\lambda \geqslant 0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Toutes les valeurs propres de } A \text{ sont positives}}$$

A est inversible : $\det A = (\det M)^2 \neq 0$. Donc

$$\boxed{\text{Zéro n'est pas une valeur propre de } A}$$

c) D'après 1a, il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PDP^{-1} = PD^tP$ (puisque P est orthogonale, $P^{-1} = {}^tP$).
De plus, d'après la question précédente, les coefficients diagonaux de D, qui sont les valeurs propres de A, sont strictement positifs. On peut donc les noter μ_i^2, avec $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ des réels strictement positifs. Posons

$$\boxed{D' = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S = PD'P^{-1}}$$

Alors $D'^2 = D$ donc

$$S^2 = PD'P^{-1}PD'P^{-1} = PDP^{-1} = PD'^2P^{-1} = A$$

2) Soit S la matrice construite au 1c. Comme les μ_i sont strictement positifs,

$$\det S = \det P \det D' (\det P)^{-1} = \det D' = \prod_{i=1}^{n} \mu_i \neq 0$$

Par conséquent

$$\boxed{S \text{ est inversible}}$$

Posons $U = MS^{-1}$. *(Si $M = US$, alors nécessairement $US = M$ et $U = MS^{-1}$: pour U, il n'y a pas le choix).*

$$\begin{aligned} {}^tUU &= {}^t(MS^{-1})MS^{-1} \\ &= {}^t(S^{-1}){}^tMMS^{-1} \\ &= ({}^tS)^{-1}AS^{-1} && \text{(car } A = {}^tMM\text{)} \\ &= S^{-1}S^2S^{-1} && \text{(car } A = S^2\text{)} \\ &= I_n \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{U \text{ est orthogonale}}$$

De plus, par définition de U, $M = US$, avec U orthogonale et S symétrique :

$$\boxed{\text{Les matrices } U \text{ et } S \text{ que l'on vient de construire conviennent}}$$

Partie 2

1) $\boxed{|||I_n||| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|X\|}{\|X\|} = 1}$

2) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a $\frac{\|MX\|}{\|X\|} \leqslant \sup_{Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|MY\|}{\|Y\|} = |||M|||$ par définition de la borne supérieure.

En multipliant par $\|X\|$ il vient $\|MX\| \leqslant |||M|||\ \|X\|$, qui est vrai aussi en $X = 0$. Conclusion :

$$\boxed{\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \|MX\| \leqslant |||M|||\ \|X\|}$$

3) Comme $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, la matrice P est en particulier inversible, donc

$$\boxed{X \mapsto PX \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}^n}$$

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|PX\|^2 = {}^tX{}^tPPX = {}^tXX = \|X\|^2$ donc

$$\begin{aligned} |||MP||| &= \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|MPX\|}{\|X\|} \\ &= \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|MPX\|}{\|PX\|} && \text{(car } \|PX\| = \|X\|\text{)} \\ &= \sup_{Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|MY\|}{\|Y\|} && \text{(car } X \mapsto Y = PX \text{ est une bijection de } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ sur } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\text{)} \\ &= |||M||| \end{aligned}$$

4) **a)** D diagonale donc $\boxed{De_i = \lambda_i e_i}$

b) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|DX\|^2 &= \|\sum_{i=1}^n (x_i De_i)\|^2 \\ &= \|\sum_{i=1}^n (x_i \lambda_i e_i)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i \lambda_i)^2 && \text{(car } (e_1, \dots, e_n) \text{ est une base orthonormée)} \\ &\leqslant \rho(D)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 && \text{(car } \lambda_i^2 \leqslant \rho(D)^2 \text{ pour tout } i\text{)} \\ &\leqslant \rho(D)^2 \|X\|^2 \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|DX\| \leqslant \rho(D)\|X\|.}$

c) Par conséquent, pour tout $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $\dfrac{\|DX\|}{\|X\|} \leqslant \rho(D)$. En passant au sup, il vient $\boxed{|||D||| \leqslant \rho(D)}$

Si i_0 est tel que $|\lambda_{i_0}| = \rho(D)$, alors d'après a) $De_{i_0} = \lambda_{i_0} e_{i_0}$.

Donc $\|De_{i_0}\| = |\lambda_{i_0}| \|e_{i_0}\| = \rho(D)\|e_{i_0}\|$. Ainsi, pour $X = e_{i_0}$, $\dfrac{\|DX\|}{\|X\|} = \rho(D)$. D'où $|||D||| \geqslant \rho(D)$.

Conclusion :

$$\boxed{|||D||| = \rho(D)}$$

5) **a)** La matrice ${}^tMM$ est symétrique donc diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale, et par une démarche identique à celle de la question 1c de la partie 1, toute ses valeurs propres sont positives – on peut donc les écrire sous forme de carrés.

$\boxed{\text{Il existe } P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } D \text{ une matrice diagonale à coefficients positifs tels que } {}^tMM = PD^2\,{}^tP}$

b) D'après les questions 4c et 3 ([1]), la matrice $P^{-1} = {}^tP$ étant orthogonale,

$$\rho(D) = |||D||| = |||D^tP|||$$

Or, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\|D^tPX\|^2 = {}^tXP^tDDPX = {}^tX(PD^{2t}P)X = {}^tX^tMMX = \|MX\|^2$$

Par conséquent $|||D^tP||| = |||M|||$.

Conclusion : $\boxed{|||M||| = \rho(D)}$

6) Il faut calculer $\rho(D)$, c'est-à-dire la racine carré de la plus grande valeur propre de ${}^tMM = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det({}^tMM - \lambda I_2) = \lambda^2 - \operatorname{Tr}({}^tMM)\lambda + \det({}^tMM) = \lambda^2 - 6\lambda + 4$$

a pour racines $3 \pm \sqrt{5}$. Ainsi

$$\boxed{|||M||| = \sqrt{3 + \sqrt{5}}}$$

Exercice 2 (E3A MP 2018)

1) **a)** Comme $M = \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & \dots & v_n \end{array}\right)$, il vient ${}^tM = \left(\begin{array}{c} {}^tv_1 \\ \hline \vdots \\ \hline {}^tv_n \end{array}\right)$, puis

$$ {}^tMM = \begin{pmatrix} tv_1v_1 & \dots & {}^tv_1v_n \\ \vdots & & \vdots \\ {}^tv_nv_1 & \dots & {}^tv_nv_n \end{pmatrix}$$

En notant a_{ij} les coefficients de la matrice ${}^tMM$,

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{ij} = {}^tv_iv_j = \langle v_i, v_j \rangle}$$

b) Dans le cas particulier où les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont orthogonaux deux à deux, $\forall i \neq j$, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ et

$$ {}^tMM = \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \|v_n\|^2 \end{pmatrix}$$

1. On prend $P^{-1} = {}^tP$ et non P pour des raisons de changement de base : D « vit » dans la base $\mathscr{B}'$ de diagonalisation, et P prend « en entrée » du $\mathscr{B}'$, donc le produit DP n'a pas vraiment de sens vu le contexte (bien que les tailles de matrices ne posent pas problème).

Donc
$$\det({}^tMM) = \|v_1\|^2\|v_2\|^2 \dots \|v_n\|^2$$
Puis, comme $\det({}^tMM) = \det({}^tM)\det(M) = \det(M)^2$, en prenant la racine,

$$\boxed{|\det(M)| = \|v_1\|\|v_2\| \dots \|v_n\|}$$

2) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale et orthogonale : $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$, et ${}^tMM = I_n$.

De plus, ${}^tM = M$ puis ${}^tMM = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$, donc ${}^tMM = I_n$ entraîne $\lambda_i^2 = 1$ pour tout i.

$$\boxed{\text{Les matrices de } M_n(\mathbb{R}) \text{ diagonale et orthogonale sont les matrices diagonales à coefficients } \pm 1.}$$

3) *Faites toujours tourner « à la main » votre programme sur un petit exemple, lorsque vous ne pouvez pas le faire tourner sur un vrai exemple sur machine. Un programme non testé est un programme bugué.*

```
1  def pscal(x, y):
2      return sum(x[i]*y[i] for i in range(len(x)))


5  def dansHn(M):
6      """M est une liste de colonnes"""
7      n = len(M)
8      for v in M:
9          for vi in v:
10             if vi not in [-1, 1]:
11                 return 0
12     for j in range(n):
13         v = M[j]
14         for w in M[j+1:]:
15             if pscal(v, w) != 0:
16                 return 0
17     return 1
```

- Les deux boucles imbriquées des lignes 8 à 11 parcourent tous les coefficients de la matrice. Si l'un d'entre eux n'est pas dans $\{-1, 1\}$, on sort en retournant « `0` » (ligne 11).
  Sinon, on continue le programme – il n'est donc pas nécessaire de mettre un **else**.
- Les deux boucles imbriquées des lignes 12 à 16 testent l'orthogonalité des vecteurs colonnes de la matrice. Par symétrie du produit scalaire, il suffit de tester soit le triangle supérieur strict ($i < j$), soit le triangle inférieur strict ($i > j$) de la matrice. Lorsqu'on en est à la j-ième colonne, on calcule son produit scalaire (ligne 15) avec les colonnes qui suivent (boucle des lignes 14 à 16). S'il est non nul, les colonnes ne sont pas orthogonales, donc on sort en retournant « `0` » (ligne 16). Sinon, on continue.
- Si les deux boucles ont été parcourues, alors les deux conditions sont vérifiées et M est un élément de $\mathcal{H}_n$: on retourne « `1` » (ligne 17).

Écrire une fonction à part pour le produit scalaire est clairement nécessaire ici : vous avez envie de dire à la machine exactement ce que dit l'énoncé :

- *Tous les coefficients de M sont dans $\{-1, 1\}$.*
- *Les vecteurs colonnes de la matrice M sont orthogonaux deux à deux : $\langle v, w \rangle = 0$.*

Ce qui rend votre fonction plus lisible.

4) **a)** Soit $M = (m_{ij})$. Alors $v_j = \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix}$ et, comme $m_{ij} = \pm 1$,

$$\|v_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

Une norme euclidienne se calcule toujours au carré.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La norme d'un vecteur colonne de } M \text{ est } \sqrt{n}}$$

b) D'après 1)b), $|\det(M)| = \|v_1\|\|v_2\| \dots \|v_n\|$ et d'après 4)a), $\|v_j\| = \sqrt{n}$. Donc

$$\boxed{|\det(M)| = n^{n/2}}$$

5) Soit i dans $[\![2, n]\!]$. Soit $I_i \subset [\![1, n]\!]$ les indices des coefficients positifs de v_i et $J_i = [\![1, n]\!] \setminus I_i$ les indices des coefficients négatifs. Alors

$$\begin{aligned}
\langle v_1, v_i \rangle &= \sum_{j=1}^{n} m_{j1} m_{ji} \\
&= \sum_{j \in I_i} 1 + \sum_{j \in J_i} -1 \\
&= \text{Card}\,(I_i) - \text{Card}\,(J_i)
\end{aligned}$$

Or $\langle v_1, v_i \rangle = 0$ puisque les colonnes sont 2 à 2 orthogonales. Ainsi Card I_i = Card J_i, c'est-à-dire

$$\boxed{\text{Le nombre des } m_{j,i} \text{ égaux à 1 est égal au nombre de } m_{j,i} \text{ égaux à } -1.}$$

6) Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{H}_n \neq \emptyset$. On considère la matrice M_0 de coefficients

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!], \qquad m_{ij} = a_{i1} a_{ij}$$

C'est-à-dire qu'on multiplie chaque ligne par le coefficient de la première colonne, i.e. par -1 lorsque ce coefficient vaut -1, ou qu'on laisse la ligne inchangée sinon.

<u>Montrons que $M_0 \in \mathcal{H}_n$</u> :

- Comme $\{-1, 1\}$ est stable par produit, $m_{ij} \in \{-1, 1\}$: la première condition est vérifiée.
- Seconde condition : Notons v_j les vecteurs colonnes de M et $v_j^{(0)}$ ceux de M_0.
  Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$.

$$\begin{aligned}
\langle v_i^{(0)}, v_j^{(0)} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} m_{ki} m_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{k1} a_{ki} a_{k1} a_{kj} && \text{(par construction de } M_0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} && (\text{car } a_{k1}^2 = (\pm 1)^2 = 1) \\
&= \langle v_i, v_j \rangle = 0 && (\text{car } M \in \mathcal{H}_n)
\end{aligned}$$

Donc $M_0 \in \mathcal{H}_n$. Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{H}_n \text{ contient une matrice } M_0 \text{ dont la première colonne est le vecteur } v_1 = \sum_{i=1}^{n} e_i}$$

7) Supposons $\mathcal{H}_n$ non vide.

D'après 6), $\mathcal{H}_n$ contient alors une matrice dont la première colonne ne contient que des 1.

D'après 5), le nombre de 1 et de -1 des autres colonnes (il y a d'autres colonnes : $n > 1$) est identique. Donc le nombre de lignes, n, est pair.

$$\boxed{n \text{ est pair}}$$

8) **a)** A toutes les colonnes, on ajoute la première. M_0 est transformée en une matrice dont les coefficients sur les colonnes $2, \ldots, n$ valent 0 ou 2. Chacune de ces colonnes est factorisable par 2 et on trouve $\det(M_0) = 2^{n-1} \det(A)$ où A est une matrice dont les coefficients valent 0 ou 1 et sont donc entiers. Le déterminant étant une somme de produit des coefficients (en développant), $\det(A) \in \mathbb{Z}$. Ainsi

$$\boxed{\det(M_0) \text{ est un entier relatif multiple de } 2^{n-1}}$$

b) n étant pair, il s'écrit $n = 2p$ (avec $p \geqslant 2$ car $n > 2$). Avec 4(b) et 8(a), $(2p)^p$ est mutiple de 2^{2p+1}.

Si, par l'absurde, p est impair alors $(2p)^p = 2^p p^p$ n'est pas factorisable par 2^{p+1} (car p^p est impair). Ainsi $p + 1 > 2p + 1$ et donc $p < 0$ ce qui est une contradiction. p est ainsi pair et donc

$$\boxed{n \text{ est un entier naturel multiple de } 4}$$