Devoir de Mathématiques numéro 5

Exercice 1

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$.

Partie 1

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et S symétrique, telles que

$$M = US$$

- 1) a) Montrer que $A = {}^tMM$ est diagonalisable.
- b) Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , calculer $\|MX\|^2$ en fonction de $\|X\|^2$ et de λ . En déduire que toutes les valeurs propres de A sont positives. Zéro peut-il être valeur propre de A ?
- c) En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ des réels strictement positifs tels que

$$A = P \begin{pmatrix} \mu_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n^2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

puis que $A = S^2$, avec S une matrice symétrique que l'on précisera en fonction de P , P^{-1} et des μ_i .

- 2) Soit S la matrice construite au 1c, montrer que S est inversible, puis que $U = MS^{-1}$ est une matrice orthogonale. Montrer que les matrices U et S que l'on vient de construire conviennent.

Partie 2

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous posons, sous réserve d'existence, $\|M\| = \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|MX\|}{\|X\|}$

- 1) Calculer $\|I_n\|$.
- 2) (5/2) Montrer l'existence de $\|M\|$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 3) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $\|MX\| \leq \|M\| \|X\|$.
- 4) Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de l'endomorphisme $X \mapsto PX$ de $\mathbb{R}^n$?
Montrer que $\|MP\| = \|M\|$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 5) Soit D une matrice diagonale de coefficients diagonaux $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On note $\rho(D) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$.
 - a) Que vaut De_i ?
 - b) Par un calcul de $\|DX\|^2$, en déduire que, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\|DX\| \leq \rho(D)\|X\|$.
 - c) En déduire que $\|D\| \leq \rho(D)$, puis que $\|D\| = \rho(D)$.
- 6) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - a) En s'inspirant de la question 1c de la partie 1, montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale à coefficients positifs tels que ${}^tMM = PD^2{}^tP$.
 - b) À l'aide des questions 3 et 4c, en déduire que $\rho(D) = \|M\|$.
- 7) On considère $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\|M\|$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1. On note E l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

On note $\|\cdot\|$ la norme associée et $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de E .

1) Soit M une matrice dans $M_n(\mathbb{R})$. On note $v_1, \dots, v_n$ ses vecteurs colonnes.

a) Exprimer en fonction des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ les coefficients de la matrice ${}^t M M$.

b) Dans le cas particulier où les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont orthogonaux deux à deux, démontrer que

$$|\det(M)| = \|v_1\| \|v_2\| \dots \|v_n\|$$

2) Déterminer les matrices dans $M_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonales et orthogonales.

On note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices M dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que :

- tous les coefficients de M sont dans $\{-1, 1\}$
- les vecteurs colonnes de la matrice M sont orthogonaux deux à deux

Par exemple, on pourra constater que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_4$$

3) Écrire une fonction en Python qui lorsqu'elle prend en entrée la liste des colonnes d'une matrice M , de taille n , renvoie 1 si la matrice est dans $\mathcal{H}_n$ et 0 sinon.

4) Soit $M \in \mathcal{H}_n$.

a) Quelle est la norme d'un vecteur colonne de M ?

b) Que vaut $|\det(M)|$?

5) Soit $M \in \mathcal{H}_n$. On suppose que le premier vecteur colonne de M est le vecteur

$$v_1 = \sum_{i=1}^n e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit, pour i dans $\llbracket 2, n \rrbracket$, $v_i = \sum_{j=1}^n m_{j,i} e_j$ le i -ième vecteur colonne de M . Démontrer que le nombre des $m_{j,i}$ égaux à 1 est égal au nombre de $m_{j,i}$ égaux à -1 .

6) On suppose que $\mathcal{H}_n$ est non vide. Démontrer que $\mathcal{H}_n$ contient une matrice M_0 dont la première colonne

est le vecteur $v_1 = \sum_{i=1}^n e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

7) Lorsque $\mathcal{H}_n$ est non vide, que peut-on dire de la parité de n ?

8) On suppose $n > 2$ et $\mathcal{H}_n$ non vide. Soit M_0 une matrice dans $\mathcal{H}_n$ dont la première colonne est le

vecteur $v_1 = \sum_{i=1}^n e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que $\det(M_0)$ est un entier relatif multiple de 2^{n-1} .

b) Démontrer que n est un entier naturel multiple de 4.