Devoir de Mathématiques numéro 5

Correction

Exercice 1 (ESCP Europe 2015)

1) a) $\det(M) = -1 + 1 = 0$ donc $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$

b) Comme $M^2 = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$M^{k+2} = M^k M^2 = M^k \times 0 = 0$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \geqslant 2, M^n = 0}$

2) a) $\det M = a - a = 0$ donc $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$

b) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad M^n = (1+a)^{n-1} M$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: $M^1 = (1+a)^0 M$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Comme $M^2 = \begin{pmatrix} 1+a & (1+a)a \\ 1+a & (1+a)a \end{pmatrix} = (1+a)M$, il vient

$$M^{n+1} = (1+a)^{n-1} M^2 = (1+a)^n M$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad M^n = (1+a)^{n-1} M}$

3) $\det M = b - a$.
Ainsi, $a = b$ entraîne $\det M = 0$ et M non inversible.
Réciproquement, si M est non inversible, alors $\det M = b - a = 0$ et donc $a = b$.
Conclusion : $\boxed{M \text{ est inversible si et seulement si } a \neq b}$

4) a) La famille des évènements $(X = k)_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'évènements.
De plus, $(X = k) \cap (X = Y) = (X = k) \cap (Y = k)$. Donc la formule des probabilités totales s'écrit

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) P(Y = k | X = k)$$

Or X et Y sont indépendantes, donc $P(Y = k|X = k) = P(Y = k)$. En conclusion,

$$\boxed{P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) P(Y = k)}$$

b) $p \in]0,1[$ donc $q^2 \in]0,1[$ et la série géométrique $\sum q^{2n}$ converge :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} = \frac{1}{1-q^2}$$

Or $p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$. Conclusion : $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{1-q}{1+q}}$

c) Comme $A = (\det M \neq 0)$ et $\det M = Y - X$, il vient

$$\overline{A} = (X = Y)$$

Or, d'après a), $P(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P(Y=k|Y=k)$.

De plus, $P(X=k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$ et $P(Y=k) = pq^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par définition de X et Y.

Donc $P(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{1-q}{1+q}$ d'après b).

Ainsi, $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(X=Y) = 1 - \frac{1-q}{1+q}$

Conclusion : $\boxed{P(A) = \frac{2q}{1+q}}$

5) **a)** Formule du binôme :

$$\boxed{(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k} \qquad \text{et} \qquad \boxed{(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k}$$

b) En suivant l'indication de l'énoncé, il vient, d'après a),

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k &= \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{j} x^{i+j} \\
&= \sum_{m=0}^{2n}\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n}{m-k} x^m
\end{aligned}$$

Avec la convention $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$. Pour $m = n$, on trouve

$$\boxed{\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}$$

c) De même qu'au 4)a), la formule des probabilités totales s'écrit

$$P(X=Y) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k)P(Y=k)$$

Or $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ car $p = 1-p = \frac{1}{2}$, et de même pour Y. Ainsi,

$$P(X=Y) = \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 = \frac{1}{4^n}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

D'après c), car $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Conclusion $\boxed{P(X=Y) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}$

d) De même qu'au 4), $\boxed{P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(X=Y) = 1 - \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}$

Exercice 2 (ECRICOME)

Partie I - Préliminaires

1) $\boxed{a_1 = \frac{1\times 2}{4} = \frac{1}{2}}$

Soit $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\sqrt{n+1}\binom{2n+2}{n+1}4^n}{4^{n+1}\sqrt{n}\binom{2n}{n}} \\
&= \frac{(2n+2)!n!^2\sqrt{n+1}}{4(2n)!(n+1)!^2\sqrt{n}} \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1)\sqrt{n+1}}{4(n+1)^2\sqrt{n}} \\
&= \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}}$$

2) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad a_n \leqslant \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: Comme $\sqrt{3} \leqslant 2$, $a_1 \leqslant \sqrt{\frac{1}{3}}$ et $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. D'après 1),

$$a_{n+1} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}a_n \leqslant \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}\sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \sqrt{\frac{2n+1}{4(n+1)}}$$

Or $(2n+1)(2n+3) - 4(n+1)^2 = -1 < 0$ donc $\frac{2n+1}{4(n+1)} \leqslant \frac{n+1}{2n+3}$. Ainsi,

$$a_{n+1} \leqslant \sqrt{\frac{n+1}{2n+3}}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad a_n \leqslant \sqrt{\frac{n}{2n+1}}}$

3) Montrons que, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$.

$$(2n+1)^2 - 4(n(n+1)) = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 4n = 1 > 0$$

Donc $\dfrac{(2n+1)^2}{(2\sqrt{n(n+1)})^2} > 1$, et d'après 1, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est strictement croissante}}$

Or $\left(\sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}\right)$ est une suite croissante de limite $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, donc par majoration (a_n) est majorée.

Comme (a_n) est croissante majorée, elle converge. Notons ℓ sa limite. Comme (a_n) est croissante, $a_1 = \dfrac{1}{2} \leqslant a_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Ainsi, en conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ converge vers } \ell \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]}$$

La formule de Stirling nous permet de conclure à partir de l'expression de a_n :

$$a_n = \frac{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{\sqrt{n}(2n)!}{n!^2 4^n}$$

Comme $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ et $(2n)! \sim \left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}$,

$$a_n \sim \frac{\sqrt{n}(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}e^{2n}}{4^n e^{2n} n^{2n} 2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Ainsi, $\boxed{\ell = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}}$.

Partie II - Etude de cas particuliers

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, notons

- A_k l'évènement « on choisit l'urne A lors de la k-ième épreuve ».
- X_k la variable aléatoire du nombre de boules dans l'urne A lors de la k-ième épreuve. $X_k(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Tant que le jeu n'est pas terminé, par indépendance des épreuves, X_k suit une loi binomiale de paramètres (k, p).

1) $\underline{n = 1}$: Dès qu'on met une boule dans une urne, le jeu se termine, et donc l'autre urne est vide, donc $R_1(\Omega) = \{0\}$ et

$$\boxed{R_1 = 0}$$

$\underline{n = 2}$: $R_2(\Omega) = \{0, 1\}$. Par conséquent R_2 suit une loi de Bernoulli.

$[R_2 = 0] = (A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2})$ est la réunion de deux évènements incompatibles. Donc

$$\begin{aligned} P(R_2 = 0) &= P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \\ &= P(A_1)P(A_2) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) && \text{Indépendance des épreuves} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De plus, $[R_2 = 1] = \overline{[R_2 = 0]}$ donc

$$P(R_2 = 1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Conclusion : $\boxed{R_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(1/2)}$

$\underline{n = 3}$: $[R_3 = 0] = (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3})$, et de même, $\boxed{P(R_3 = 0) = \dfrac{1}{4}}$.

$[R_3 = 1]$: Il y a au total $n + k = 4$ épreuves.

$$\begin{aligned} [R_3 = 1] &= (X_4 = 1) \cup (X_4 = 3) && \text{Union disjointe} \\ &= (X_3 = 1, \bar{A}_4) \cup (X_3 = 2, A_4) \end{aligned}$$

Donc $P(X_3 = 1) = \binom{3}{1} p(1-p)^2 = \frac{3}{2^3}$ et $P(X_3 = 2) = \frac{3}{2^3}$. Ainsi, l'union étant disjointe et la dernière épreuve indépendante des autres,

$$P(R_3 = 1) = P(X_3 = 1)P(\bar{A}_4) + P(X_3 = 2)P(A_4) = \frac{3}{8}$$

$[R_3 = 2]$: $P(R_3 = 2) = 1 - P(R_3 = 1) - P(R_3 = 2) = \frac{3}{8}$.

Conclusion : $\boxed{P(R_3 = 0) = \frac{1}{4}, P(R_3 = 1) = \frac{3}{8}, P(R_3 = 2) = \frac{3}{8}}$

Remarque. On peut aussi rédiger à l'aide d'un arbre en expliquant bien comment on en déduit les résultats. □

2) Par définition, $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.

$$\boxed{E(R_1) = 0} \qquad \boxed{E(R_2) = \frac{1}{2}} \qquad E(R_3) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} = \boxed{\frac{9}{8}}$$

$\boxed{V(R_1) = 0}$ car R_1 est constant. $\boxed{V(R_2) = \frac{1}{4}}$ car c'est une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Théorème de transfert : $E(R_3^2) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$, donc par la formule de Huygens, on a $V(R_3) = E(R_3^2) - E(R_3)^2 = \frac{15}{8} - \frac{81}{64} = \boxed{\frac{39}{64}}$.

3) $\boxed{R_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]}$. En effet, dès qu'une urne atteint n boules, le jeu s'arrête, et on regarde le nombre de boules dans l'autre urne, qui est donc un entier positif (c'est un nombre de boules !) inférieur strictement à n, sinon le jeu se serait arrêté avant, quand cette urne aurait eu n boules.

4) **a)** On regarde l'événement $(X_{n-1+k} = n-1)$ avec $k < n$, or $X_N \hookrightarrow \mathscr{B}(N, 1/2)$ puisque le jeu n'est pas terminé, donc

$$\boxed{P(X_{n-1+k} = n-1) = \binom{n-1+k}{n-1} \frac{1}{2^{n-k-1}}}$$

b) Le jeu se termine avec n boule dans l'urne pleine et k dans l'autre, donc au bout de $n+k$ épreuves.

$$[R_n = k] = (X_{n-1+k} = n-1, A_{n+k}) \cup (X_{n-1+k} = k, \bar{A}_{n+k})$$

C'est une union disjointe, le dernier tirage est indépendant du reste, donc

$$\begin{aligned} P(R_n = k) &= P(X_{n-1+k} = n-1)P(A_{n+k}) + P(X_{n-1+k} = k)P(\bar{A}_{n+k}) \\ &= \binom{n-1+k}{n-1} \frac{1}{2^{n-k-1}} \times \frac{1}{2} + \binom{n-1+k}{k} \frac{1}{2^{n-k-1}} \times \frac{1}{2} = \binom{n-1+k}{k} \frac{1}{2^{n-k-1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(R_n = k) = \frac{1}{2^{n+k-1}} \binom{n-1+k}{k}}$$

5) Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. Ainsi, $n + k - 1 \geq 0$ puisque $n \geq 2$ et $k \geq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{2(k+1)}{n+k} P(R_n = k+1) &= \frac{2(k+1)}{n+k} \frac{1}{2^{n+k}} \binom{n+k}{k+1} = \frac{1}{2^{n+k-1}} \frac{k+1}{n+k} \frac{(n+k)!}{(k+1)!(n-1)!} \\ &= \frac{1}{2^{n+k-1}} \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{1}{2^{n+k-1}} \binom{n+k-1}{k} = P(R_n = k) \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-2]\!], \quad 2(k+1)P(R_n = k+1) = (n+k)P(R_n = k)}$$

6) $R_n(\Omega)$ est fini, donc R_n a une espérance. En suivant l'indication :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-2} 2(k+1)P(R_n=k+1) &= \sum_{k=0}^{n-2}(n+k)P(R_n=k)\\ 2\sum_{k=1}^{n-1} kP(R_n=k) &= n\sum_{k=0}^{n-2} P(R_n=k)+\sum_{k=0}^{n-2} kP(R_n=k)\\ 2E(R_n) &= n(1-P(R_n=n-1))+E(R_n)-(n-1)P(R_n=n-1)\end{aligned}$$

Car $\displaystyle\sum_{k\in R_n(\Omega)} P(R_n=k)=1$. Ainsi,

$$\boxed{E(R_n)=n-(2n-1)P(R_n=n-1)}$$

7) En utilisant la suite (a_p) définie au I,

$$n-E(R_n)=(2n-1)P(R_n=n-1)=(2n-1)\frac{1}{2^{2n-2}}\binom{2n-2}{n-1}=\frac{(2n-1)}{\sqrt{n-1}}a_{n-1}$$

Or, $a_{n-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ et $\dfrac{(2n-1)}{\sqrt{n-1}}\underset{n\to+\infty}{\sim}2\sqrt{n}$, donc $\boxed{n-E(R_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}}$.

8) $R_n(\Omega)$ est fini, on peut donc appliquer le théorème de transfert : R_n^2 a une espérance, et

$$E(R_n^2)=\sum_{k=0}^{n-1}k^2P(R_n=k)=\sum_{k=1}^{n-1}k^2P(R_n=k)=\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)^2P(R_n=k+1)$$

Donc en utilisant l'égalité de la question 5, et en notant $\alpha_n=P(R_n=n-1)$, on a :

$$\begin{aligned}2E(R_n^2) &= \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)(n+k)P(R_n=k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-2}k^2P(R_n=k)+(n+1)\sum_{k=0}^{n-2}kP(R_n=k)+n\sum_{k=0}^{n-2}P(R_n=k)\\ &= E(R_n^2)-(n-1)^2\alpha_n+(n+1)\big(E(R_n)-(n-1)\alpha_n\big)+n(1-\alpha_n)\end{aligned}$$

Donc, en simplifiant puis en utilisant l'expression de $(2n-1)\alpha_n$ obtenue en 6,

$$\begin{aligned}E(R_n^2) &= (n+1)E(R_n)-\Big((n-1)^2+(n+1)(n-1)+n\Big)\alpha_n+n\\ &= (n+1)E(R_n)-n(2n-1)\alpha_n+n && \text{Or } (2n-1)\alpha_n=n-E(R_n)\\ &= (n+1)E(R_n)-n^2+nE(R_n)+n\end{aligned}$$

Conclusion $\boxed{E(R_n^2)=(2n+1)E(R_n)-n(n-1)}$

9) Formule de Huygens : $V(R_n)=E(R_n^2)-E(R_n)^2=\boxed{(2n+1)E(R_n)-n^2+n-E(R_n)^2}$.

10) Lors de la question 7, on a vu $E(R_n)=n-\dfrac{(2n-1)}{\sqrt{n-1}}a_{n-1}$.

Or, d'après I.1, pour tout entier $n\geq 1$, $a_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}a_n$, c'est-à-dire pour tout entier $n\geq 2$,

$$a_n=\frac{2n-1}{2\sqrt{(n-1)n}}a_{n-1}$$

De plus $a_1=\dfrac{1}{2}$, d'où le programme :

```
import numpy as np


def a(n):
    if n == 1:              # Condition de sortie
        return 1/2
    else:                   # Appel récursif
        return (2*n-1) / (2 * np.sqrt((n-1) * n)) * a(n-1)


def esperance(n):
    return n - (2*n-1) / np.sqrt(n-1) * a(n-1)
```

Partie III - Retour au cas général

1) Notons BP l'évènement « c'est l'urne B qui est plein à la fin du jeu », et AP pour l'urne A. On a bien sûr $P(AP)+P(BP)=P(AP\cup BP)=1$ (les deux urnes ne peuvent être pleines en même temps, puisque le jeu s'arrête dès que l'une est pleine, donc les deux évènement sont incompatibles. Et leur réunion fait Ω puisque le jeu ne s'arrête que lorsque l'une des deux urnes est pleine, et on est certain qu'il s'arrête : il dure au plus $m+n-1$ coups).

Or, si l'on note BP_k l'évènement « c'est l'urne B qui est plein à la fin du jeu, qui a duré $m+k$ coups » (ce qui revient à demander que l'on a mis k boules dans l'urne A, on a $BP=\bigcup_{k=0}^{n-1} BP_k$, et comme ces évènements sont deux à deux incompatibles, on a par σ-additivité de la probabilité : $P(BP)=\sum_{k=0}^{n-1} P(BP_k)$.

BP_k est la réunion disjointe de $\binom{m-1+k}{k}$ évènements (qui correspondent aux choix des numéros des épreuve où l'on place les k boules dans l'urne A, forcèment lors des $m+k-1$ premieres épreuves, car pour que BP_k se réalise, on joue $m+k$ fois, et donc il faut que lors de la dernière épreuve, on mette la boule dans B) qui sont tous de probabilités q^mp^k (on a choisi m fois l'urne B et k fois l'urne A), et donc $P(BP)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m-1+k}{k}q^mp^k=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m-1+k}{m-1}q^mp^k$ (par la formule de symétrie des coefficients binomiaux).

De même, $P(AP)=\sum_{k=0}^{m-1}\binom{n-1+k}{n-1}p^nq^k$, d'où la formule.

2) **a)** $u_{m+1}-u_m=q^m\binom{n-1+m}{n-1}>0$, donc la suite est strictement croissante.

D'après la relation précédente, on a $p^nu_m\leqslant 1$, donc $u_m\leqslant\dfrac{1}{p^n}$ (n étant fixé), ce qui fait que $\dfrac{1}{p^n}$ est un majorant (car il ne dépend pas de m).

Donc la suite (u_m) est croissante majorée, donc converge (Théorème de la limite monotone).

b) $\displaystyle\binom{m-1+k}{m-1}=\frac{(m-1+k)!}{(m-1)!k!}=\frac{1}{k!}m(m+1)\dots(m-1+k)=\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(m+i)$.

Or, $m+i\underset{m\to+\infty}{\sim}m$, et donc en faisant n fois le produit de suites équivalentes (n étant fixé ne dépendant pas de m), on a $\prod_{i=0}^{k-1}(m+i)\underset{m\to+\infty}{\sim}m^k$, et donc $\boxed{\binom{m-1+k}{m-1}\underset{m\to+\infty}{\sim}\frac{m^k}{k!}}$.

c) On a $q^mp^k\binom{m-1+k}{m-1}\underset{m\to+\infty}{\sim}\dfrac{m^k}{k!}q^mp^k$, or $\dfrac{p^k}{k!}$ est une constante (ne dépend pas de m), et par comparaison puissance/exponentielle, comme $0 < q < 1$, on a $m^k q^m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, comme deux suites équivalentes ont même limite, $q^m p^k \binom{m-1+k}{m-1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En faisant une somme finie (de n termes, n constant), on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{m\to+\infty} q^m \sum\limits_{k=0}^{n-1} p^k \binom{m-1+k}{m-1} = 0}$.

d) L'égalité de la quesion 1 se réécrit $p^n u_m = 1 - q^m \sum\limits_{k=0}^{n-1} p^k \binom{m-1+k}{m-1}$, et donc la question précédente donne $\lim\limits_{m\to+\infty} p^n u_m = 1$.

Partie IV - Étude d'une variable discrète d'univers image infini

1) $T_n(\Omega) = \mathbb{N}$: l'inclusion $T_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$ est évidente (T_n représente un nombre de boules). L'inclusion réciproque vient par exemple de ce que $\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_k} \cap A_{k+1} \cap \ldots A_{k+n}$ réalise $T_n = k$, ceci quelque soit $k \in \mathbb{N}$, et donc on a bien $\mathbb{N} \subset T_n(\Omega)$.

2) $P(T_n = k) = \binom{n+k-1}{k} p^n q^k$, de la même façon qu'auparavant.

3) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(T_n = k) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k} p^n q^k = p^n \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k} q^k = p^n \dfrac{1}{(1-q)^n}$ d'après la formule du binôme négatif. Et comme $q = 1-p$, on trouve bien 1.

4) $1 + Z_j$ suit une loi géométrique de paramètre p, car tant que l'on a pas mis n boules dans l'urne A, les épreuves se font de manière identiques et indépendantes.

Donc $\boxed{Z_j(\Omega) = \mathbb{N}}$, $\boxed{P(Z_j = k) = q^k p}$, $\boxed{E(Z_j) = \dfrac{1}{p} - 1} = \dfrac{q}{p}$ et $\boxed{V(Z_j) = \dfrac{q}{p^2}}$.

5) $\boxed{T_n = \sum\limits_{j=1}^{n} Z_j}$.

6) Par linéarité de l'espérance, $E(T_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} E(Z_j) = \boxed{\dfrac{nq}{p}}$.

Les (Z_j) sont indépendants, donc $V(T_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} V(Z_j) = \boxed{\dfrac{nq}{p^2}}$.

Exercice 3 (Mines-Ponts MP 2016)

1) <u>Valeurs propres de J</u> : Soit $\chi_J(x)$ le polynôme caractéristique de J.

$$\chi_J(x) = \det(xI_n - J) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\chi_J(x) = x \begin{vmatrix} x & -1 & & (0) \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}(-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & -1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ (0) & & x & -1 \end{vmatrix}$$

Les deux matrices carrées de taille $n-1$ étant triangulaires, il vient

$$\chi_J(x) = x^n + (-1)^{n+2+n-1} = x^n - 1$$

L'ensemble des valeurs propres est donc l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, noté

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \| k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}$$

Finalement, $\boxed{\begin{array}{l}\text{Les valeurs propres réelles de } J \text{ sont } -1 \text{ et } 1 \text{ si } n \text{ est pair, et } 1 \text{ si } n \text{ est impair.}\\ \text{Les valeurs propres complexes de } J \text{ sont les racines } n\text{-ième de l'unité.}\end{array}}$

Diagonalisabilité : Le polynôme caractéristique de J est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, par conséquent

$$\boxed{J \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}.}$$

2) Il reste à déterminer une base de chaque espace propre.
Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathbb{U}_n$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Notons

$$E_k = \text{Ker}\,(\omega^k I_n - J)$$

le sous-espace propre de J associé à la valeur propre ω^k.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$. Comme $JX = J \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}$

$$X \in E_k \iff \begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ \quad \vdots \\ x_n = \omega^k x_{n-1} \\ x_1 = \omega^k x_n \end{cases} \iff X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix}$$

La dernière égalité du système étant vérifiée car elle s'écrit $x_1 = \omega^{nk} x_1$, ce qui est toujours vrai puisque $\omega^n = 1$. En notant $X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix}$, il vient $E_k = \text{Vect}\,(X_k)$. Comme J est diagonalisable d'après la question 1, l'espace est la somme directe des sous-espaces propres de J, d'où $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=0}^{n-1} E_k$. Ainsi,

$$\boxed{(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}) \text{ forme une base de } \mathbb{C}^n \text{ de vecteurs propre de } J.}$$

Remarque. La réduction de la matrice J permet aussi de réduire toutes les matrices circulantes

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

On constate qu'une matrice circulante est un polynôme en J : $A = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell J^\ell$. Par conséquent elle a les mêmes sous-espaces propres $E_k = \text{Vect}\,(X_k)$ que J, pour les valeurs propres $\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \omega^{k\ell}$. $\square$

3) Dans cette question et les deux suivantes, comme le suggère l'énoncé, toutes les égalités de variables aléatoires seront notées modulo n, pour éviter d'avoir à distinguer les cas $i = 0$ lorsqu'on parle de $i-1$, et $i = n$ lorsqu'on parle de $i+1$.

Puisque l'évènement $(X_0 = 0)$ est de probabilité 1 et que la somme des probabilités des $(X_0 = k)$ vaut 1, les évènements $(X_0 = k)$ sont de probabilité nulle pour tout $k \neq 0$:

$$\boxed{U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé et $i \in X_{m+1}(\Omega) = \{0, \dots, n-1\}$. La famille $(X_m = k)_k$ forme un système complet d'évènements, ainsi

$$P(X_{m+1} = i) = \sum_{k=0}^{n-1} P((X_{m+1} = i) \cap (X_m = k))$$

Or $P((X_{m+1} = i) \cap (X_m = k)) = 0$ si $k \notin \{i-1, i+1\}$:

$$\begin{aligned} P(X_{m+1} = i) &= P((X_{m+1} = i) \cap (X_m = i-1)) + P((X_{m+1} = i) \cap (X_m = i+1)) \\ &= P(X_{m+1} = i | X_m = i-1) P(X_m = i-1) + P(X_{m+1} = i | X_m = i+1) P(X_m = i+1) \end{aligned}$$

De plus $P(X_{m+1} = k-1 | X_m = k) = P(X_{m+1} = k+1 | X_m = k) = \dfrac{1}{2}$. D'où

$$P(X_{m+1} = i) = \frac{1}{2} P(X_m = i-1) + \frac{1}{2} P(X_m = i+1)$$

Ainsi, $U_{m+1} = AU_m$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & & & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & & & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(J + J^T) = \frac{1}{2}(J + J^{-1})$$

Conclusion :

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(J + J^{-1})}$$

Remarque. Une matrice de permutation permute les vecteurs de la base canonique, elle transforme donc une base orthonormée en une base orthonormée : c'est une matrice orthogonale. Ainsi, la transposée d'une matrice de permutation est son inverse.

Ici, la permutation circulaire étant d'ordre n, $J^n = I_n$ et donc $J^{n-1} = J^{-1}$. □

4) D'après la question 1, J est semblable à une matrice diagonale avec les racines n-ièmes de l'unité sur la diagonale : il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$J = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega^{n-1} \end{pmatrix} P^{-1}$$

En passant à l'inverse, $J^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega^{-(n-1)} \end{pmatrix} P^{-1}$. Puis

$$A = \frac{1}{2}(J + J^{-1}) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) \end{pmatrix} P^{-1}$$

Comme n est impair et supérieur à 3 par hypothèse, la valeur propre 1 n'apparaît qu'une fois sur la diagonale et chaque cosinus apparaît exactement deux fois :

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \cos\left(-\frac{2k\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2(n-k)\pi}{n}\right)$$

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont 1 de multiplicité 1 et, pour tout } k \in \left\{1, \ldots, \frac{n-1}{2}\right\},\ \lambda_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \text{ de multiplicité 2.}}$

Remarque. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$, en particulier toutes ses valeurs propres sont réelles. Ce qui permet de contrôler – un peu – ses calculs. ☐

Pour $k \in \left\{1, \ldots, \frac{n-1}{2}\right\}$, $\frac{2k\pi}{n} \in]0, \pi[$, d'où $\lambda_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \in]-1, 1[$:

$\boxed{\text{La valeur propre de module maximal est 1.}}$

L'énoncé demande de trouver un vecteur unitaire, mais sans préciser pour quelle norme. Cependant, il est naturel de choisir la norme euclidienne, car une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée pour la norme euclidienne.

Maintenant, posons $V_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$: $JV_0 = V_0$ d'après le calcul des sous-espaces propres à la question 2.

Remarque. Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice qui vérifie

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \sum_{j=1}^{n} M_{ij} = 1$$

ce qui est le cas des matrices stochastiques, alors $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M pour la valeur propre 1. ☐

$\boxed{\text{Un vecteur propre unitaire qui convient, associé à la valeur propre 1, est } V_0.}$

5) Par une récurrence immédiate,

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \qquad U_m = A^m U_0$$

La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$: soit $\mathscr{B}'$ une base de diagonalisation comme à la question 4, avec les valeurs propres dans l'ordre $(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{(k-1)/2})$, où l'on impose de surcroît que le premier vecteur soit V_0 — qui est bien unitaire — défini à la question 4 ci-dessus, et que la base $\mathscr{B}'$ soit orthonormée. Soit P la matrice de passage associée.

$$A = PDP^{-1} \qquad \text{où} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{\frac{n-1}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = P^T$$

Comme toutes les valeurs propres autres que 1 sont de module strictement plus petit que 1, il vient

$$D^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1^m & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_1^m & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{\frac{n-1}{2}}^m \end{pmatrix} \xrightarrow[m \to +\infty]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = D_\infty$$

Puis, par continuité du produit matriciel, $A^m = PD^mP^T \xrightarrow[m \to +\infty]{} PD_\infty P^T$.
Notons f_∞ l'endomorphisme de matrice $A_\infty = \lim\limits_{m \to +\infty} A^m$ dans la base canonique. Sa matrice dans la base orthonormée $\mathscr{B}'$ est une matrice de projecteur, très précisément le projecteur sur $\operatorname{Vect}(V_0)$ sous-espace propre de A pour la valeur propre 1, parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres. Comme $\mathscr{B}'$ est orthonormée, f_∞ est un projecteur orthogonal, ainsi

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \qquad f_\infty(x) = \langle x, V_0 \rangle V_0$$

Donc $\lim\limits_{m \to +\infty} U_m = \left(\lim\limits_{m \to +\infty} A^m \right) U_0 = \langle U_0, V_0 \rangle V_0 = \dfrac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ Conclusion

$$\boxed{\lim_{m \to +\infty} U_m = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}$$