

Devoir de Mathématiques numéro 5

Exercice 1

Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, soit M la matrice carrée d'ordre 2 définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$.

- 1) Dans cette question on choisit $a = b = -1$.
 - a) La matrice M est-elle inversible ?
 - b) Calculer pour tout entier $n \geq 2$ la matrice M^n .
- 2) Dans cette question, on choisit $a = b$.
 - a) La matrice M est-elle inversible ?
 - b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $M^n = (1 + a)^{n-1}M$.
- 3) On revient au cas général où a et b sont des réels quelconques. Montrer que la matrice M est inversible si et seulement si $a \neq b$.
- 4) Dans cette question, on considère deux variables aléatoires discrètes X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

Soit N la matrice aléatoire définie par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ et A l'évènement « la matrice N est inversible ».

- a) Établir la relation $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k)$.
 - b) Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$.
 - c) En déduire $P(A)$ en fonction de q .
- 5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question on considère deux variables aléatoires discrètes X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

Soit N la matrice aléatoire définie par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ et A l'évènement « la matrice N est inversible ».

- a) Pour x réel, écrire les développements de $(x + 1)^n$ et $(x + 1)^{2n}$.
- b) En utilisant l'identité $(x + 1)^{2n} = (x + 1)^n(x + 1)^n$, montrer que l'on a $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$.
- c) En déduire que $P(X = Y) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$.
- d) Calculer $P(A)$ en fonction de n .

Exercice 2

Deux urnes A et B , initialement vides, peuvent contenir respectivement au plus n et m boules, où $n \geq 1$ et $m \geq 1$. On s'intéresse au protocole suivant

- On choisit l'urne A avec la probabilité $p \in]0, 1[$, l'urne B avec la probabilité $q = 1 - p$.
- On met une boule dans l'urne choisie.
- On répète cette épreuve autant de fois qu'il est nécessaire pour que l'une des urnes A ou B soit pleine, c'est-à-dire contienne n boules pour l'urne A ou contienne m boules pour l'urne B , les choix des urnes étant mutuellement indépendants.

Partie I - Préliminaires

On définit la suite de terme général a_n par :

$$a_n = \frac{\sqrt{n} \binom{2n}{n}}{4^n} \quad n \geq 1$$

- 1) Calculer a_1 et, pour tout entier $n \geq 1$, le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.
- 2) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $a_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$.
- 3) Donner le sens de variation de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et montrer qu'elle converge vers un réel ℓ tel que :

$$\frac{1}{2} \leq \ell \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Montrer que $\ell = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Partie II - Etude de cas particuliers

Dans cette partie seulement $m = n$ et $p = q = \frac{1}{2}$.

On note R_n la variable aléatoire égale au nombre (éventuellement nul) de boules contenues dans l'urne qui n'est pas pleine, à l'issue de l'expérience (*L'indice n de R_n est le n donnant la capacité de l'urne A , et dans cette partie, de B aussi*).

- 1) Donner les lois de R_1 , R_2 et R_3 . Justifier vos calculs.
- 2) Calculer l'espérance et la variance de R_1 , R_2 et R_3 .
Dans toute la suite du problème $n \geq 2$.
- 3) Quel est l'ensemble $R_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable R_n ?
- 4) Soit k appartenant à l'univers image $R_n(\Omega)$.

a) Calculer la probabilité qu'à l'issue du $(n-1+k)$ -ième tirage l'urne A contienne $n-1$ boules et l'urne B contienne k boules.

b) Donner alors la probabilité $P(R_n = k)$ (*On trouvera $P(R_n = k) = \frac{1}{2^{n+k-1}} \binom{n-1+k}{k}$*).

- 5) Vérifier que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, \quad 2(k+1)P(R_n = k+1) = (n+k)P(R_n = k)$$

- 6) Par sommation de la relation qui précède, en déduire que

$$E(R_n) = n - (2n-1)P(R_n = n-1)$$

- 7) Donner alors un équivalent de $n - E(R_n)$ quand n tend vers plus l'infini.
- 8) De façon analogue, montrer que :

$$E(R_n^2) = (2n+1)E(R_n) - n(n-1)$$

- 9) En déduire l'expression de $V(R_n)$ en fonction de n et $E(R_n)$.
- 10) Ecrire une fonction récursive en Python, prenant en entrée l'entier n , et retournant la valeur de a_n (*on pourra utiliser les résultats de la partie I*). On pourra utiliser pour la fonction racine carrée la commande : `sqrt`.
Construire ensuite une nouvelle fonction (qui peut faire appel à la précédente), renvoyant la valeur de $E(R_n)$.

Partie III - Retour au cas général

On abandonne les conditions $m = n$ et $p = q = \frac{1}{2}$.

1) En utilisant un argument probabiliste, montrer que :

$$q^m \sum_{k=0}^{n-1} p^k \binom{m-1+k}{m-1} + p^n \sum_{k=0}^{m-1} q^k \binom{n-1+k}{n-1} = 1 \quad (1)$$

2) On pose $u_m = \sum_{k=0}^{m-1} q^k \binom{n-1+k}{n-1}$.

a) Etudier le sens de variation de la suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ et donner à l'aide de la relation (1) un majorant de u_m ne dépendant pas de m . Etablir alors la convergence de la suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$.

b) Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, donner un équivalent de $\binom{m-1+k}{m-1}$ lorsque m tend vers $+\infty$.

c) En déduire l'existence et la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} q^m \sum_{k=0}^{n-1} p^k \binom{m-1+k}{m-1}$$

d) Prouver alors que : $\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = \frac{1}{p^n}$.

Partie IV - Étude d'une variable discrète d'univers image infini

Dans cette dernière partie l'urne B , initialement vide, a une capacité illimitée et l'urne A , initialement vide, peut contenir au plus n boules ($n \geq 1$). On s'intéresse au protocole suivant

- On choisit l'urne A avec la probabilité $p \in]0, 1[$, l'urne B avec la probabilité $q = 1 - p$.
- On met une boule dans l'urne choisie.
- On répète cette épreuve autant de fois qu'il est nécessaire pour que l'urne A soit pleine, c'est-à-dire contienne n boules, les choix successifs des urnes étant mutuellement indépendants.

On note alors T_n le nombre (éventuellement nul) de boules contenues dans l'urne B et $(Z_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, les variables aléatoires définies de la façon suivante :

- Z_1 compte le nombre de boules mises dans B avant de mettre la première boule dans A .
- Pour tout entier j de $\llbracket 2, n \rrbracket$, Z_j compte le nombre de boules mises dans B entre la $(j-1)$ -ième boule et la j -ième boule mises dans A .

On admet que T_n est une variable aléatoire.

- 1) Quel est l'ensemble $T_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable T_n ?
- 2) Pour tout entier naturel k appartenant à $T_n(\Omega)$, donner la valeur de $P(T_n = k)$.
- 3) Vérifier que : $\sum_{k=0}^{+\infty} P(T_n = k) = 1$.
- 4) Pour tout entier j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, donner la loi, l'espérance, la variance de Z_j .
- 5) Exprimer T_n en fonction des variables $(Z_j)_{1 \leq j \leq n}$ et de l'entier n .
- 6) En déduire l'espérance et la variance de la variable T_n .

Exercice 3 (Mines)

Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire par $J_{i,j} = 1$ si $j - i = 1$ ou $i - j = n - 1$, et $J_{i,j} = 0$ sinon.

- 1) Calculer les valeurs propres réelles et complexes de J , et en déduire que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
- 2) Déterminer une base de $\mathbb{C}^n$ de vecteurs propres de J .

Dans les trois questions suivantes n désigne un entier naturel *impair* ≥ 3 . Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note X_m une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n-1\}$ telle que

- $X_0 = 0$ avec probabilité 1 ;
- si $X_m = k$, alors ou bien $X_{m+1} = k-1$ modulo n , ou bien $X_{m+1} = k+1$ modulo n , ceci avec équiprobabilité.

On note

$$U_m = \begin{pmatrix} P(X_m = 0) \\ P(X_m = 1) \\ \vdots \\ P(X_m = n-1) \end{pmatrix}.$$

- 3) Déterminer U_0 et une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $U_{m+1} = AU_m$. On exprimera A à l'aide de la matrice J .
- 4) Déterminer les valeurs propres de la matrice A et un vecteur propre de $\mathbb{R}^n$ unitaire associé à la valeur propre de module maximal.
- 5) En déduire la limite de U_m lorsque $m \rightarrow +\infty$.