Devoir de Mathématiques numéro 4

$\boxed{\text{Correction}}$

Exercice 1 (E3A PC 2014)

1) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad A_\theta^k = A_{k\theta}$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. Ainsi,

$$\begin{aligned} A_\theta^{k+1} &= A_{k\theta}A_\theta = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta & -\cos k\theta\sin\theta - \sin k\theta\cos\theta \\ \sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta + \cos k\theta\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  D'après les formules de trigonométrie. Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 0 \qquad A_\theta^k = A_{k\theta}}$

Géométriquement, A_θ est la matrice d'une rotation d'angle θ (et de centre O) dans $\mathbb{R}^2$. Donc A_θ^k est la composée de k fois la rotation d'angle θ.
Ainsi, ce résultat signifie que $\boxed{\text{Composer } k \text{ fois la rotation d'angle } \theta \text{ donne la rotation d'angle } k\theta}$

2) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad ({}^tB)^k = {}^t(B^k)$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie car $I_n = {}^tI_n$.
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie : $({}^tB)^k = {}^t(B^k)$. De plus ${}^tB{}^tA = {}^t(AB)$.
  Par conséquent $({}^tB)^{k+1} = {}^tB({}^tB)^k = {}^tB{}^t\left(B^k\right) = {}^t(B^{k+1})$. Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 0 \qquad ({}^tB)^k = {}^t(B^k)}$

3) $A_\theta \in \mathscr{O}_2(\mathbb{R})$ (${}^tA_\theta A_\theta = I_2$) donc $A_\theta^{-1} = {}^tA_\theta$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente,

$$A_\theta^{-k} = (A_\theta^{-1})^k = ({}^tA_\theta)^k = {}^t(A_\theta)^k$$

Or d'après 1), $A_\theta^k = A_{k\theta}$, et comme cosinus est paire et sinus imparie ${}^tA_{k\theta} = A_{-k\theta}$. D'où $A_\theta^{-k} = A_{-k\theta}$.
Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ A_\theta^k = A_{k\theta}}$

4) Cherchons $M = A_\theta$ telle que $M^p = A_{p\theta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_{\pi/2}$.

Choisissons par exemple $\theta = \dfrac{\pi}{2p}$ et donc

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\pi}{2p}\right) & -\sin\left(\dfrac{\pi}{2p}\right) \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2p}\right) & \cos\left(\dfrac{\pi}{2p}\right) \end{pmatrix}}$$

D'après 1), $M^p = A_\theta^p = A_{p\theta} = A_{\pi/2}$ donc convient.

Exercice 2

Partie 1 (un exemple)

1) Comme $A^T = -A$, $\det(A^T) = \det(-A) = (-1)^3 \det(A) = -\det(A)$. *(rappel : on sort -1 de chaque colonne, donc trois fois)*

Or $\det(A^T) = \det(A)$. Donc $\det(A) = -\det(A)$ puis $\det(A) = 0$:

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ n'est pas inversible}}$$

2) Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \det(xI_3 - A) \\ &= \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ &= \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ x & x & 1 \\ x & -1 & x \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & x-1 & 2 \\ 0 & -2 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= x\Big((x-1)(x+1) + 4\Big) \\ &= x(x^2+3) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ n'a qu'une valeur propre réelle, } 0}$$

On verra plus loin que c'est un résultat général pour les endomorphismes antiautoadjoints.

3) $\boxed{\langle X, Y \rangle = X^T Y}$

$$\begin{aligned} \langle u(X), X \rangle &= (AX)^T X \\ &= \Big(-x_2 + x_3 \quad x_1 - x_3 \quad -x_1 + x_2\Big) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= -x_2x_1 + x_3x_1 + x_1x_2 - x_3x_2 - x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme antiautoadjoint}}$$

On pouvait aussi le montrer comme en 2.3.b, en utilisant uniquement $A^T = -A$: dans ce cas, il y a moins de calculs.

4) Noyau :
Comme 0 est une valeur propre de multiplicité $\alpha_0 = 1$, et que $1 \leqslant \dim E_0 \leqslant \alpha_0 = 1$, on a $\dim \mathrm{Ker}\ u = 1$.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\ u \iff AX = 0$$

$$\iff \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ -x + y = 0 \quad L_1 + L_2 + L3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = y = z$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

$$\iff X \in \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Rang : Le théorème du rang s'écrit

$$\boxed{\mathrm{rg}\ u = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}\ u = 2}$$

5) On remarque que

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \qquad \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \qquad \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

Or $\mathrm{Im}\ u$ est engendrée par les vecteurs colonne de la matrice A, et $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ d'après 3).

Donc $\mathrm{Ker}\ u \perp \mathrm{Im}\ u$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\ u \subset (\mathrm{Im}\ u)^\perp$.
De plus $\dim E = 3$ finie, donc pour tout sous-espace vectoriel F, $F \oplus F^\perp = E$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}\ u)^\perp &= \dim E - \dim \mathrm{Im}\ u \\ &= \dim \mathrm{Ker}\ u \qquad \text{D'après le théorème du rang} \end{aligned}$$

Donc il y a inclusion et égalité des dimension :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ u = (\mathrm{Im}\ u)^\perp}$$

6) $(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ est une famille libre (les vecteurs ne sont pas colinéaires) de vecteurs de $\mathrm{Im}\ u$ (engendrée par les vecteurs colonnes de A).

Or d'après 4), $\dim \mathrm{Im}\ u = 2$. Donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathrm{Im}\ u$.

Procédé d'orthonormalisation de Schmidt : soit $v = \varepsilon_2 - \lambda\varepsilon_1$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v \perp \varepsilon_1$:

$$\langle v, \varepsilon_1 \rangle = 0 = \langle \varepsilon_2 - \lambda\varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle = \langle \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle - \lambda \langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle$$

Donc $\lambda = \dfrac{\langle \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle}{\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle} = -\dfrac{1}{2}$, puis $v = \varepsilon_2 + \dfrac{1}{2}\varepsilon_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Finalement, en normant,

$$\boxed{\text{Une base orthonormée de Im } u \text{ est } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$$

On pouvait aussi immédiatement utiliser que Ker $u \perp$ Im u, *et dans ce cas le second vecteur de la base de* Im u *peut s'obtenir par le produit vectoriel :* $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

7) Comme Ker $u = (\text{Im } u)^\perp$, on a

- Ker $u \oplus$ Im $u = E$: la réunion d'une base de Ker u et d'une base de Im u sera une base de E,
- Ker $u \perp$ Im u : la réunion d'une famille orthogonale de Ker u et d'une famille orthogonale de Im u sera une famille orthogonale.

Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base orthonormée de } E}$$

8)

- $u(e_1) = 0$ car $e_1 \in$ Ker u
- $u(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} A \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$
  $= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$
  $= \sqrt{3} e_3$
- $u(e_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}} e_2$

$$\boxed{A' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}}$$

Matrice de passage P (orthogonale) : $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}}$

Formule de changement de base : $\boxed{A = PA'P^{-1}}$

Partie 2 (Généralités)

1) a) Le produit scalaire est bilinéaire :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u(x+y), x+y\rangle && \text{car } u \text{ est antiautoadjoint} \\ &= \langle u(x)+u(y), x+y\rangle \\ &= \langle u(x), x+y\rangle + \langle u(y), x+y\rangle \\ &= \langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle \\ &= \langle u(x), y\rangle + \langle x, u(y)\rangle && \text{car } u \text{ est antiautoadjoint} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle}$$

b) Nous venons de montrer, en 1)a),

$$u \text{ est antiautoadjoint} \Longrightarrow \text{pour tout } x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$$

Réciproquement : supposons que pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$. En $y = x$,

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), x\rangle = -\langle x, u(x)\rangle = -\langle u(x), x\rangle$$

Donc $\forall x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$: u est antiautoadjoint. Finalement,

$$\boxed{u \text{ est antiautoadjoint si et seulement si, pour tout } x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle}$$

2) • Montrons que $\text{Ker } u \subset (\text{Im } u)^\perp$:

$$\begin{aligned}
x \in \text{Ker } u &\Longrightarrow u(x) = 0 \\
&\Longrightarrow \forall x' \in E,\ \langle x, u(x')\rangle = -\langle u(x), x'\rangle \qquad \text{d'après 1)a)} \\
& = \langle 0, x'\rangle \qquad \text{car } x \in \text{Ker } u \\
& = 0 \\
&\Longrightarrow \forall y \in \text{Im } u,\ \langle x, y\rangle = 0 \\
&\Longrightarrow x \in (\text{Im } u)^\perp
\end{aligned}$$

Donc

$$\text{Ker } u \subset (\text{Im } u)^\perp$$

• Montrons que $\dim \text{Ker } u = \dim(\text{Im } u)^\perp$.
D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u = \dim E$.
De plus, $\dim F^\perp + \dim F = \dim E$, donc ici $\dim(\text{Im } u)^\perp + \dim \text{Im } u = \dim E$.
Par conséquent

$$\dim \text{Ker } u = \dim(\text{Im } u)^\perp$$

Conclusion : par inclusion et égalité des dimensions,

$$\boxed{\text{Ker } u = (\text{Im } u)^\perp}$$

On aurait pu faire cette démonstration pour montrer la question 5 de la partie 1.

3) Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.

a) Soit $(x, y) \in E^2$ et X, Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans $\mathscr{B}$ associés. La base $\mathscr{B}$ est une *base orthonormée* donc

$$\boxed{\langle x, y\rangle = X^T Y}$$

b) Notons $A = (a_{ij})$ la matrice de u dans $\mathscr{B}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons u antiautoadjoint.

$$\begin{aligned}
\forall j \in [\![1, n]\!], \qquad u(e_j) &= \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_j), e_i\rangle e_i \qquad \text{car } \mathscr{B} \text{ est une base orthonormée} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \qquad \text{par définition de } a_{ij}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad a_{ij} &= \langle u(e_j), e_i\rangle \\
&= -\langle e_j, u(e_i)\rangle \\
&= -a_{ji}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est antisymétrique}}$$

On pouvait aussi faire une preuve comme dans la question de cours : matriciellement, antiautoadjoint s'écrit $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\forall Y \in \mathbb{R}^n$, $X^T(AT+A)Y = 0$ et entraîne $A^T + A = 0$ (avec les étapes intermédiaires nécessaires, évidemment).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons A antisymétrique : $A^T = -A$. Soit $(x, y) \in E^2$ de vecteurs colonnes associés X et Y dans la base $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned} \langle u(x), y\rangle &= (AX)^T Y \\ &= -X^T A^T Y && \text{rappel : } (AB)^T = B^T A^T \\ &= -\langle x, u(y)\rangle \end{aligned}$$

Donc, d'après 1)b), u est antiautoadjoint.

Conclusion :

$$\boxed{u \text{ est antiautoadjoint si et seulement si la matrice } A \text{ de } u \text{ dans } \mathscr{B} \text{ est antisymétrique}}$$

Partie 3 (Réduction)

1) Soit $x \neq 0$ un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u(x), x\rangle \\ &= \lambda\langle x, x\rangle \\ &= \lambda\|x\|^2 \end{aligned}$$

Or $x \neq 0$ entraîne $\|x\| \neq 0$, donc $\lambda = 0$:

$$\boxed{\text{la seule valeur propre réelle possibles pour } u \text{ est } 0}$$

Par conséquent, si u est diagonalisable, sa matrice dans une base de diagonalisation sera la matrice diagonale avec des 0 sur la diagonale. C'est-à-dire la matrice nulle. Ainsi, dans ce cas, $u = 0$.
Réciproquement, l'endomorphisme $u = 0$ est bien diagonalisable et antiautoadjoint. Conclusion :

$$\boxed{\text{Un endomorphisme antiautoadjoint } u \text{ est diagonalisable si et seulement si } u = 0}$$

2) Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} \langle s(x), y\rangle &= \langle u(u(x)), y\rangle \\ &= -\langle u(x), u(y)\rangle && \text{d'après 1)b)} \\ &= \langle x, u(u(y))\rangle && \text{idem} \\ &= \langle x, s(y)\rangle \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } s = u \circ u \text{ est symétrique}}$$

3) **a)** Comme $x \in V_a$, $s(x) = ax$. Donc $\langle s(x), x\rangle = \langle ax, x\rangle = a\|x\|^2$.
De plus, $s = u^2$, donc par antisymétrie de u,

$$\langle s(x), x\rangle = \langle u(u(x)), x\rangle = -\langle u(x), u(x)\rangle = -\|u(x)\|^2$$

Finalement,

$$\boxed{\langle s(x), x\rangle = a\|x\|^2 = -\|u(x)\|^2}$$

Comme $x \neq 0$, $\|x\| \neq 0$ et donc $a = -\dfrac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} \leqslant 0$. Or $a \neq 0$ par hypothèse. Ainsi,

$$\boxed{a < 0}$$

b) • Montrons que $F = \text{Vect}\,(x, u(x))$ est stable par u :

$$\begin{aligned} y \in \text{Vect}\,(x, u(x)) &\Longrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ y = \alpha x + \beta u(x) \\ &\Longrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ u(y) = \alpha u(x) + \beta u^2(x) \qquad \text{Or } u^2(x) = s(x) = ax \\ &\Longrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ u(y) = \alpha u(x) + a\beta x \\ &\Longrightarrow u(y) \in \text{Vect}\,(x, u(x)) \end{aligned}$$

Donc $u(F) \subset F$,c'est-à-dire

$$\boxed{F = \text{Vect}\,(x, u(x)) \text{ est stable par } u}$$

• Montrons plus généralement que, si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u :
Soit $y \in F^\perp$.

$$\begin{aligned} \forall z \in F, \qquad \langle u(y), z\rangle &= -\langle y, u(z)\rangle && \text{Car } u \text{ antiautoadjoint} \\ &= 0 && \text{Car } u(z) \in F \text{ et } y \in F^\perp \end{aligned}$$

Donc $u(y) \in F^\perp$. Conclusion :

$$\boxed{F^\perp \text{ est stable par } u}$$

• Déterminons la matrice de $\widetilde{u} : F \to F$ défini par $\widetilde{u}(x) = u(x)$ pour tout $x \in F$.
Par définition d'un endomorphisme antiautoadjoint, $\langle u(x), x\rangle = 0$, donc $(x, u(x))$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls de $F = \text{Vect}\,(x, u(x))$: elle est libre. Par construction, elle est génératrice. Donc c'est une base, qui plus est orthogonale. Posons

$$e_1 = \frac{x}{\|x\|} \qquad \text{et} \qquad e_2 = \frac{u(x)}{\|u(x)\|}$$

La famille (e_1, e_2) est une base orthonormée de F.
D'après 3)a), $\dfrac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} = -a > 0$, donc $\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sqrt{-a}$.
Comme de plus $u^2(x) = s(x) = ax$,

$$\begin{aligned} u(e_1) &= \frac{u(x)}{\|x\|} = \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}\frac{u(x)}{\|u(x)\|} = \sqrt{-a}e_2 \\ u(e_2) &= \frac{u^2(x)}{\|u(x)\|} = \frac{ax}{\|u(x)\|} = \frac{a}{\sqrt{-a}}\frac{x}{\|x\|} = -\sqrt{-a}e_1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\widetilde{u}$, l'endomorphisme induit sur F par u a une matrice de la forme

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad b = \sqrt{-a}}$$

dans la base orthonormée $\left(\dfrac{x}{\|x\|}, \dfrac{u(x)}{\|u(x)\|}\right)$.

c) Notons $p = \dim \text{Ker}\, u$. La matrice de u dans une base bien choisie s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & -b_1 & & & \\ & & & b_1 & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & -b_k \\ & & & & & & b_k & 0 \end{pmatrix}$$

Noyau : On décompose E :

$$E = (\text{Ker } u) \oplus_\perp (\text{Ker } u)^\perp$$

$F = \text{Ker } u$ est stable par u, donc d'après le raisonnement fait en 3b, $F^\perp$ est stable par u. La matrice de u dans une base orthonormée compatible avec la somme directe orthogonale sera donc diagonale blocs, de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

Avec un bloc de zéros en haut à gauche de taille $\dim \text{Ker } u$.
Supplémentaire du noyau : Puis on considère $u_1 : (\text{Ker } u)^\perp \to (\text{Ker } u)^\perp$ la restriction de u, qui est bijective, et $s_1 = u_1^2$ qui est aussi bijective ($\det s_1 = \det u_1^2 > 0$).
Nous avons prouvé à la question précédente que l'on peut trouver un sous-espace vectoriel F de dimension 2 stable par u_1 et une base orthonormée $\mathscr{B}_F$ de F telle que la matrice de la restriction de u_1 à F dans cette base soit

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad b > 0$$

De plus $F^\perp$ stable par u_1, donc $u_2 : F^\perp \to F^\perp$ est aussi antiautoadjoint, inversible, et $\dim F^\perp < \dim(\text{Ker } u)^\perp$: on peut appliquer l'hypothèse de récurrence (à détailler proprement).

Exercice 3 (CCINP PC 2009)

1) Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $S^T = S$,

$$(M^T SM)^T = M^T S^T M^{TT} = M^T SM$$

Donc $M^T SM$ est symétrique. De plus, par positivité de S,

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad X^T(M^T SM)X = (MX)^T S(MX) = Y^T SY \geqslant 0$$

avec $Y = MX \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc $M^T SM \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Conclusion :

$$\boxed{S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \Longrightarrow \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M^T SM \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})}$$

2) Cours, preuves à connaître.

3) A est symétrique réelle donc diagonalisable. Notons λ_1 et λ_2 ses valeurs propres.

$$\text{Tr } A = \lambda_1 + \lambda_2 = 3 > 0 \quad \text{et} \quad \det A = \lambda_1 \lambda_2 = 2 - 1 = 1 > 0$$

Le déterminant prouve que les valeurs propres sont de meme signe, positif d'après la trace. Donc

$$\boxed{A \text{ est symétrique positive}}$$

Comme $\det A = 1 \neq 0$, $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre, et comme $A \in \mathscr{S}_2^+(\mathbb{R})$,

$$\boxed{A \text{ est symétrique définie positive}}$$

4) Le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$ est un vecteur propre pour la valeur propre $-1 < 0$. Donc toutes les valeurs propres de B ne sont pas positives :

$$\boxed{B \text{ n'est pas définie positive}}$$

5) Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$: $\mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+$. Soit T symétrique semblable à S : $\mathrm{Sp}\,(T) = \mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+$. Donc $T \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\boxed{\text{Si } S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \text{ et si } T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ semblable à } S, \text{ alors } T \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$$

6) **a)** Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(M)$, et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre :

$$MX = \lambda X$$

Si $\lambda = 0$, $X \in \mathrm{Ker}\ M$ et $\mathrm{Ker}\ M \neq \{0\}$: M n'est pas inversible, ce qui est absurde. Ainsi,

$$\lambda \neq 0$$

En composant par M^{-1} et en divisant par λ,

$$\frac{1}{\lambda}X = M^{-1}X$$

Ainsi,

$$\boxed{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(M) \Longrightarrow \lambda \neq 0 \text{ et } \lambda^{-1} \in \mathrm{Sp}\,(M^{-1})}$$

Montrons par double inclusion que $\mathrm{Sp}\,(M^{-1}) = \{\lambda^{-1}\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}\,(M)\}$.

$\boxed{\supset}$ L'implication ci-dessus signifie $\{\lambda^{-1}\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}\,(M)\} \subset \mathrm{Sp}\,(M^{-1})$.

$\boxed{\subset}$ Soit $\mu \in M^{-1}$. Comme M^{-1} est inversible, on peut appliquer la propriété précédente : $\mu \neq 0$ et $\lambda = \mu^{-1}$ est valeur propre de $(M^{-1})^{-1} = M$.
C'est-à-dire $\mu = \lambda^{-1}$ avec $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(M)$. Ainsi, $\mathrm{Sp}\,(M^{-1}) \subset \{\lambda^{-1}\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}\,(M)\}$

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(M^{-1}) = \{\lambda^{-1}\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}\,(M)\}}$$

b) Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, d'après le cours $\mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+^*$. En particulier, $0 \notin \mathrm{Sp}\,(S)$, donc S inversible. Puis

$$(S^{-1})^T = (S^T)^{-1} = S^{-1}$$

Donc S^{-1} symétrique.
D'après ci-dessus, $\mathrm{Sp}\,(S^{-1}) = \{\lambda^{-1}\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}\,(S)\}$ donc $\mathrm{Sp}\,(S^{-1}) \subset \mathbb{R}_+^*$.
Donc $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \text{ alors } S \text{ est inversible et } S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$

7) Supposons que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^{\mathsf{T}}SX = 0$.
Comme S est symétrique réelle, d'après le théorème spectral, il existe une base de vecteurs propres de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on peut noter $(V_1, \ldots, V_n)$. D'après ci-dessus,

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad V_i^{\mathsf{T}}SV_i = 0$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comme V_i est un vecteur propre, en notant λ_i la valeur propre associée, on a

$$V_i^{\mathsf{T}}SV_i = Vi^{\mathsf{T}}(\lambda_i V_i) = \lambda_i \|V_i\|^2$$

Ce calcul, dans l'esprit de l'exercice 24 ou de la preuve que $E_\lambda \perp E_\mu$, est très classique.
Comme V_i est un vecteur propre, $\|V_i\|^2 \neq 0$, donc $\lambda_i = 0$.
Ainsi, toute valeur propre de S est nulle. Comme il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle [1] que

$$S = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = 0$$

Donc $S = 0$. Ainsi,

1. Par exemple $P = (V_1|V_2|\cdots|V_n) \in O_n(\mathbb{R})$

$$\boxed{\text{Si pour tout } X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^{\mathsf{T}}SX = 0, \text{ alors } \mathrm{Sp}\,(S) = \{0\} \text{ et } S = 0}$$

8) a) Soit $S = S_2 - S_1$. $S_1 \leqslant S_2$ signifie $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, donc $\mathrm{Sp}\,(S) \in \mathbb{R}_+$.
D'autre part, $S_2 \leqslant S_1$ entraîne $-S \in S_n^+(\mathbb{R})$, donc $\mathrm{Sp}\,(S) \in \mathbb{R}_-$.
Ainsi $\mathrm{Sp}\,(S) = \{0\}$. D'après la preuve de la question 7, S étant diagonalisable (car symétrique réelle), $S = 0$. Ainsi,

$$\boxed{(S_1 \leqslant S_2) \text{ et } (S_2 \leqslant S_1) \Longrightarrow S_1 = S_2}$$

b) Si $n = 1$, la relation d'ordre est l'ordre sur $\mathbb{R}$, donc $S_1 \leqslant S_2$ ou $S_2 \leqslant S_1$.
Supposons $n \geqslant 2$ et considérons les matrices diagonales, donc symétriques, suivantes :

$$S_1 = \mathrm{diag}\,(3, 1, \ldots, 1) \qquad \text{et} \qquad S_2 = 2I_n$$

Alors $S = S_1 - S_2 = \mathrm{diag}\,(1, -1, \ldots, -1)$. Ni S ni $-S$ n'est symétrique positive ($\mathrm{Sp}\,(S) = \{-1, 1\}$), donc ni $S_2 \leqslant S_1$ ni $S_1 \leqslant S_2$ n'est vrai :

$$\boxed{\text{Si } (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 \text{ et } n \geqslant 2, \text{ on n'a pas nécessairement } S_1 \leqslant S_2 \text{ ou } S_2 \leqslant S_1}$$

Pour prouver ce genre d'affirmation, il suffit d'un contre-exemple. Mais le contre exemple doit être bien explicite, et adapté : traiter le cas $n = 2$ ne suffit pas, puisque n est fixé. Ce qui ne doit pas vous empêcher, par contre, de trouver un contre-exemple pour $n = 2$ puis d'en tirer un contre-exemple pour n quelconque.

c) Soit $S_1 = \mathrm{diag}\,(0, 1, \ldots, 1)$ et $S_2 = I_n$ deux matrices diagonales donc symétriques.
Comme $S_2 - S_1 = \mathrm{diag}\,(1, 0, \ldots, 0) \in S_n^+(\mathbb{R})$, $S_1 \leqslant S_2$ et $S_1 \neq S_2$.
Par contre, $S = S_2 - S_1 = \mathrm{diag}\,(1, 0, \ldots, 0)$ a pour spectre $\{0, 1\}$, donc n'est pas définie positive : $S_1 < S_2$ est faux.

$$\boxed{\text{Si } (S_1, S_2) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2 \text{ telles que } S_1 \leqslant S_2, S_1 \neq S_2, \text{ on n'a pas nécessairement } S_1 < S_2}$$

d) Soit S_1 et S_2 deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leqslant S_2$ et α un réel.
Posons $S = S_2 - S_1$, $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ par définition de $\leqslant$.
Si $\alpha \geqslant 0$, $\alpha S \in S_n^+(\mathbb{R})$ ($X^T(\alpha S)X = \alpha X^T SX \geqslant 0$). Donc $\alpha S_1 \leqslant \alpha S_2$.
Si $\alpha \leqslant 0$, le résultat précédent avec $-\alpha$ donne $-\alpha S \in S_n^+(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\alpha S_2 \leqslant \alpha S_1$.
Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Si } \alpha \geqslant 0, & S_1 \leqslant S_2 \Longrightarrow \alpha S_1 \leqslant \alpha S_2 \\ \text{Si } \alpha \leqslant 0, & S_1 \leqslant S_2 \Longrightarrow \alpha S_2 \leqslant \alpha S_1 \end{array}}$$

e) Soit S, S_1 et S_2 trois matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leqslant S_2$: $S_2 - S_1 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Comme $(S_2 + S) - (S_1 + S) = S_2 - S_1 \in S_n^+(\mathbb{R})$, il vient $S_1 + S \leqslant S_2 + S$:

$$\boxed{\forall (S_1, S_2, S) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad S_1 \leqslant S_2 \Longrightarrow S_1 + S \leqslant S_2 + S}$$

9) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $S_1 \leqslant S_2$, on a $S = S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après la question 1,

$$M^{\mathsf{T}}S_2M - M^{\mathsf{T}}S_1M = M^{\mathsf{T}}SM \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

Ainsi, $M^{\mathsf{T}}S_1M \leqslant M^{\mathsf{T}}S_2M$.

$$\boxed{\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2, \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \qquad S_1 \leqslant S_2 \Longrightarrow M^{\mathsf{T}}S_1M \leqslant M^{\mathsf{T}}S_2M}$$

10) **a)** D'après le théorème spectral, S est diagonalisable dans une base orthonormée : si on note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de S comptées avec multiplicité, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDP^{-1}$, avec D la matrice diagonale $\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Comme $PI_nP^{-1} = I_n$,

$$S - I_n = P(D - I_n)P^{-1}$$

et les valeurs propres de $S - I_n$ sont $(\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_n - 1)$.
Or $I_n \leqslant S$ signifie $S - I_n \in S_n^+(\mathbb{R})$, donc $\mathrm{Sp}\,(S - I_n) \subset \mathbb{R}_+$.
Donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i - 1 \geqslant 0$, donc $\lambda_i \geqslant 1$:

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(S) \subset [1, +\infty[}$$

Comme $0 \notin \mathrm{Sp}\,(S)$,

$$\boxed{S \in GL_n(\mathbb{R})}$$

b) Nous venons de montrer que, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(S)$, $1 \leqslant \lambda$. Donc $\lambda \neq 0$, et $0 < \lambda^{-1} \leqslant 1$.
D'après la question 6a, $\mathrm{Sp}\,(S^{-1}) = \{\lambda^{-1}\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}\,(S)\}$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(S^{-1}) \subset]0, 1]}$$

Ce qui entraîne immédiatement $0 < S^{-1}$.
De même qu'en 10a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les valeurs propres de $M + \alpha I_n$ sont les valeurs propres de M, auxquelles on rajoute α. Donc $\mathrm{Sp}\,(-S + I_n) \subset [0, 1[$.
Ainsi, comme $-S + I_n$ est symétrique, $-S + I_n \in S_n^+(\mathbb{R})$, et

$$\boxed{0 < S^{-1} \leqslant I_n}$$

11) **a)** Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = M^{\mathsf{T}}M$.

$$S^{\mathsf{T}} = M^{\mathsf{T}}(M^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = S$$

Donc S est symétrique. De plus, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} X^{\mathsf{T}}SX &= MX^{\mathsf{T}}MX \\ &= \|MX\|^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

De plus, $MX = 0$ entraîne $M^{-1}MX = M^{-1}0$, donc $X = 0$:

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0, \qquad X^{\mathsf{T}}SX > 0$$

Ainsi, $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{S'il existe } M \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } S = M^{\mathsf{T}}M, \text{ alors } S \text{ est symétrique définie positive}}$$

C'est la question de cours, avec un petit plus : dans le cas définie positif. Classique.

b) Comme $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, ses valeurs propres sont strictement positives. S étant diagonale, ses valeurs propres sont sur la diagonale : soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $S = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors, en notant $M = \mathrm{diag}\,(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$,

$$S = M^2 = M^{\mathsf{T}}M$$

La matrice M est inversible car les $\sqrt{\lambda_i}$ sont non nuls.

$$\boxed{S = M^{\mathsf{T}}M \quad \text{avec} \quad M \in GL_n(\mathbb{R})}$$

c) D'après le théorème spectral, S est diagonalisable dans une base orthonormée : soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $S = PDP^{\mathsf{T}}$.
Avec $\widetilde{D} = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$, et $M = \widetilde{D}P^{\mathsf{T}}$, il vient

$$\begin{aligned} M^{\mathsf{T}}M &= P\widetilde{D}\widetilde{D}P^{\mathsf{T}} \\ &= PDP^{\mathsf{T}} \\ &= S \end{aligned}$$

De plus, $\det M = \det \widetilde{D} \det P^{\mathsf{T}}$, avec $\det \widetilde{D} > 0$ (produits des réels $\sqrt{\lambda_i}$ strictement positifs) et $\det P \in \{-1, 1\}$ non nul. Donc $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\boxed{\exists M \in GL_n(\mathbb{R}) \qquad S = M^{\mathsf{T}}M}$$

12) *C'est une question de synthèse : il faut avoir en tête les résultats qui précèdent – on peut éventuellement se faire une rapide fiche, au fur et à mesure de l'épreuve.*
$0 < S_1$ signifie $S_1 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
D'après la question 11c, il existe donc $M_1 \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S_1 = M_1^{\mathsf{T}}M_1$. Soit une telle M_1.
Avec $M = M_1^{-1}$, la question 9 s'écrit

$$\boxed{I_n = (M_1^{-1})^{\mathsf{T}}M_1^{\mathsf{T}}M_1M_1^{-1} \leqslant (M_1^{-1})^{\mathsf{T}}S_2M_1^{-1}}$$

D'après 10a, $S = (M_1^{-1})^{\mathsf{T}}S_2M_1^{-1}$ est inversible :

$$0 \neq \det S = \det(M_1)^{-1}\det S_2 \det(M_1)^{-1}$$

Donc $\det S_2 \neq 0$:

$$\boxed{S_2 \text{ est inversible.}}$$

De plus, d'après 10b, $0 < S^{-1} \leqslant I_n$. Or

$$S^{-1} = M_1S_2^{-1}M_1^{\mathsf{T}}$$

Posons $M = (M_1^{-1})^{\mathsf{T}}$: la question 9 s'écrit

$$\begin{aligned} S^{-1} \leqslant I_n &\Longrightarrow M^{\mathsf{T}}S^{-1}M \leqslant M^{\mathsf{T}}I_nM \\ &\Longrightarrow M_1^{-1}M_1S_2^{-1}M_1^{\mathsf{T}}(M_1^{-1})^{\mathsf{T}} \leqslant M_1^{-1}(M_1^{-1})^{\mathsf{T}} \\ &\Longrightarrow S_2^{-1} \leqslant (M_1^{\mathsf{T}}M_1)^{-1} \\ &\Longrightarrow \boxed{S_2^{-1} \leqslant S_1^{-1}} \end{aligned}$$