Devoir de Mathématiques numéro 4

Exercice 1

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

1) Montrer par un calcul que l'on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $A_\theta^k = A_{k\theta}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

2) Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $({}^tB)^k = {}^t(B^k)$.

3) En déduire que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $A_\theta^k = A_{k\theta}$.

4) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^p = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$.
Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit antiautoadjoint si

$$\forall x \in E, \qquad \langle u(x), x \rangle = 0$$

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite antisymétrique si $A^T = -A$.

Partie 1 (un exemple)
Dans cette partie, $E = \mathbb{R}^3$ euclidien canonique, muni du produit scalaire canonique

$$\forall \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \in E^2, \qquad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

L'endomorphisme u de E est défini par $u(X) = AX$ pour tout $X \in E$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) En étudiant A^{T}, montrer que A n'est pas inversible.

2) Déterminer les valeurs propres réelles de A.

3) Rappeler l'expression matricielle du produit scalaire $\langle X, Y \rangle$, où $(X, Y) \in E^2$. En déduire que u est un endomorphisme antiautoadjoint.

4) Déterminer Ker u et en déduire le rang de u.

5) Montrer que Ker $u = (\text{Im } u)^\perp$.

6) Déterminer une base orthonormée de Im u.

7) On note e_1 un vecteur unitaire de Ker u et (e_2, e_3) une base orthonormée de Im u. Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de E.

8) Donner la matrice A' de u dans la base $\mathscr{B}$, la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ et la formule reliant A, A' et P.

Partie 2 (Généralités)
Désormais, E est un espace vectoriel euclidien quelconque, de dimension n. Soit u un endomorphisme de E.

1) **a)** On suppose u antiautoadjoint. En considérant le vecteur $x+y$, établir que, pour tout $x, y \in E$,

$$\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$$

b) En déduire que u est antiautoadjoint si et seulement si, pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$.

2) On suppose u antiautoadjoint. Montrer que $\text{Ker } u = (\text{Im } u)^{\perp}$.

3) Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.

a) Soit $(x, y) \in E^2$ et X, Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans $\mathscr{B}$ associés.
Rappelez l'expression matricielle du produit scalaire $\langle x, y\rangle$ à l'aide de X et Y.

b) Montrer que u est antiautoadjoint si et seulement si la matrice A de u dans $\mathscr{B}$ est antisymétrique.

Partie 3 (Réduction)
Désormais, $u \in \mathscr{L}(E)$ est supposé antiautoadjoint.

1) Quelles sont les seules valeurs propres réelles possibles pour u ?
À quelle condition un endomorphisme antiautoadjoint est-il diagonalisable ?

2) Montrer que l'endomorphisme $s = u \circ u$ est symétrique.

3) Soit a l'une des valeurs propres non nulle de s (s'il en existe) et V_a le sous-espace propre associé.

a) Soit $x \in V_a \setminus \{0_E\}$. Montrer que

$$\langle s(x), x\rangle = a\|x\|^2 = -\|u(x)\|^2$$

et en déduire que $a < 0$.

b) On considère toujours $x \in V_a \setminus \{0_E\}$
Montrer que $F = \text{Vect}\,(x, u(x))$ et $F^{\perp}$ sont stables par u.
Montrer que l'endomorphisme induit sur F par u a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

dans une base orthonormée (on précisera b)

c) En déduire une matrice réduite de u dans une base bien choisie.

Exercice 3
Notations et objectifs

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients réels, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n, $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. I_n désigne la matrice identité d'ordre n, et pour toute matrice A, A^{T} désigne la transposée de A.
Selon le contexte, 0 désigne soit le réel nul, soit la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, soit encore la matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On rappelle que pour toute matrice symétrique réelle d'ordre n, il existe P appartenant à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle d'ordre n telles que $S = PDP^{-1}$.
$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $(\cdot|\cdot)$ et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.
Une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^{\mathsf{T}}SX \geqslant 0$$

et définie positive si :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^{\mathsf{T}}SX > 0$$

On note $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définies positives.
L'objectif de ce problème est d'étudier une relation d'ordre sur l'ensemble des matrices symétriques réelles.

Dans tout le problème, S désigne une matrice symétrique réelle d'ordre n.

1) Montrer que si S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M^\mathsf{T}SM$ appartient aussi à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

2) Montrer que S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (respectivement strictement positives).

3) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique positive. Est-elle symétrique définie positive ?

4) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Est-elle symétrique définie positive ?

5) Montrer que si S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et si T est une matrice symétrique réelle semblable à S, alors T appartient aussi à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

6) **a)** Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que si λ est valeur propre de M, alors λ est non nul et λ^{-1} est valeur propre de M^{-1}. En déduire le spectre de M^{-1} en fonction du spectre de M.

b) Montrer que si S appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors S est inversible et S^{-1} appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

7) Montrer que si pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\mathsf{T}SX = 0$, alors toute valeur propre de S est nulle et $S = 0$.

8) On munit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des relations notées $\leqslant$ et $<$, définies respectivement par :

$$\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2,\ (S_1 \leqslant S_2 \iff S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))$$

et

$$\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2,\ (S_1 < S_2 \iff S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$$

a) Si S_1 et S_2 sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leqslant S_2$ et $S_2 \leqslant S_1$, montrer que $S_1 = S_2$.

b) Si $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$, montrer que l'on n'a pas nécessairement $S_1 \leqslant S_2$ ou $S_2 \leqslant S_1$.

c) Si S_1 et S_2 sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leqslant S_2, S_1 \neq S_2$, a-t-on $S_1 < S_2$?

d) Si S_1 et S_2 sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leqslant S_2$ et α un réel, comparer les matrices αS_1 et αS_2 pour la relation $\leqslant$.

e) Si S, S_1 et S_2 sont trois matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leqslant S_2$, comparer les matrices $S + S_1$ et $S + S_2$ pour la relation $\leqslant$.

9) Soit $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ avec $S_1 \leqslant S_2$. Montrer que pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M^\mathsf{T}S_1M \leqslant M^\mathsf{T}S_2M$.

10) On suppose $I_n \leqslant S$.

a) Que peut-on dire des valeurs propres de S ? En déduire que S est inversible.

b) Que peut-on dire des valeurs propres de S^{-1} ? En déduire : $0 < S^{-1} \leqslant I_n$.

11) **a)** Montrer que s'il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = M^\mathsf{T}M$, alors S est symétrique définie positive.

b) Montrer que si S est diagonale définie positive, alors il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = M^\mathsf{T}M$.

c) Montrer que ce résultat subsiste si S est symétrique définie positive non diagonale.

12) Soit $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $0 < S_1 \leqslant S_2$. Montrer qu'il existe $M_1 \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n \leqslant (M_1^{-1})^\mathsf{T}S_2M_1^{-1}$, en déduire que S_2 est inversible et $S_2^{-1} \leqslant S_1^{-1}$.