Devoir de Mathématiques numéro 4

Correction

Exercice 1 (HEC, B/L 2016)

1) **a)** Si f est bijectif, alors f est injectif et surjectif, c'est-à-dire $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et $\operatorname{Im} f = E$. Donc

$$\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$$

Ainsi $\boxed{p_0 = 1}$

b) Montrons que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ en faisant les calculs dans une bonne base.
Comme f n'est pas bijectif, $E_0 = \operatorname{Ker}(0\,\mathrm{id}_E - f) = \operatorname{Ker} f \neq \{0\}$: 0 est valeur propre de f.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres, avec e_i correspondant à la valeur propre $\lambda = \lambda_i$. On impose de plus que $(e_1, \dots, e_k)$ soient les vecteurs propres correspondant à la valeur propre $\lambda = 0$, et que les λ_i suivant soient non nuls.

Soit $x \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ son vecteur colonne des coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. On a

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i = \sum_{i=k+1}^{n} x_i \lambda_i e_i$$

Ou, matriciellement dans la base $\mathscr{B}$, si $y = f(x)$,

$$Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{k+1} x_{k+1} \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

On notera $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ celui de x'.

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \quad &\Longrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \exists x' \in E,\ x = f(x') \\
&\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{k+1} x_{k+1} \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \exists x' \in E, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{k+1} x'_{k+1} \\ \vdots \\ \lambda_n x'_n \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \quad \forall i \in [\![k+1, n]\!], \lambda_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, k]\!], x_i = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \forall i, x_i = 0 \\
&\Longrightarrow \quad x = 0
\end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.
De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E$.
Conclusion : $\boxed{\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E}$

Ainsi, $\boxed{p_0 = 1}$

2) Soit f un endomorphisme de E vérifiant la relation $f \circ (f - \text{id}_E)^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

a) f et id_E commutent donc on peut appliquer la formule du binôme pour $n = 2$,

$$(f - \text{id}_E)^2 + f \circ (2\,\text{id}_E - f) = f^2 - 2f \circ \text{id}_E + \text{id}_E^2 + 2f - f^2 = \text{id}_E$$

b) Soit $x \in E$. D'après ci-dessus,

$$x = (f - \text{id}_E)^2(x) + f\Big((2\,\text{id}_E - f)(x)\Big) = x_1 + x_2$$

avec $x_2 = f\Big((2\,\text{id}_E - f)(x)\Big) = f(x') \in \text{Im } f$
et $x_1 = (f - \text{id}_E)^2(x) \in \text{Ker } f$ car $f(x_1) = f \circ (f - \text{id}_E)^2(x) = 0$.
Donc $E = \text{Ker } f + \text{Im } f$.
De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E$.
Conclusion : $\boxed{\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E}$

Ainsi, $\boxed{p_0 = 1}$

3) Montrons que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$. Par hypothèse, $f = -\sum_{i=2} \frac{a_i}{a_1} f^i$.

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f &\implies f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \exists x' \in E,\ x = f(x') \\ &\implies \exists x' \in E,\ f^2(x') = 0 \quad \text{et} \quad x = f(x') = -\sum_{i=2} \frac{a_i}{a_1} f^i(x') = 0 \qquad (\text{car } i \geqslant 2) \\ &\implies x = 0 \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.
De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E$.
Conclusion : $\boxed{\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E}$

4) <u>Ker A</u> :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A &\iff AX = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 &=& 0 \\ x_1 - x_4 &=& 0 \\ x_2 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{Ker } A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

Im A : D'après le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Im}\ A = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker}\ A = 4 - 2 = 2$$

De plus, Im A est engendré par les vecteurs colonnes :

$$\mathrm{Im}\ A = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$$

Comme $\dim \mathrm{Im}\ A = 2$, il suffit de prendre 2 vecteurs colonnes non colinéaires (i.e. libres), par exemple les deux premiers :

$$\boxed{\mathrm{Im}\ A = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)}$$

Les techniques pour déterminer Ker A *et* Im A *doivent être parfaitement maîtrisées.*

Ainsi, $e_3 \in \mathrm{Ker}\ f$ et $e_3 \in \mathrm{Im}\ f$, donc

$$\boxed{\mathrm{Im}\ f \cap \mathrm{Ker}\ f \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^3 = 0$$

On lit immédiatement $\mathrm{Ker}\ f^2 = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_3, e_4)$ et $\mathrm{Im}\ f^2 = \mathrm{Vect}\,(e_3)$ donc $\mathrm{Ker}\ f^2 \cap \mathrm{Im}\ f^2 \neq \{0\}$.
Mais $\mathrm{Ker}\ f^3 = E$ et $\mathrm{Im}\ f^3 = \{0\}$. Donc $\mathrm{Ker}\ f^3 \oplus \mathrm{Im}\ f^3 = \mathbb{R}^4$
Ainsi, $\boxed{p = 3}$ est le plus petit des entiers p pour lesquels on a $\mathrm{Ker}\ f^p \oplus \mathrm{Im}\ f^p = \mathbb{R}^4$

5) **a)** Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}\ f^k &\implies f^k(x) = 0 \\ &\implies f^{k+1}(x) = f(0) = 0 \\ &\implies x \in \mathrm{Ker}\ f^{k+1} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Ker}\ f^k \subset \mathrm{Ker}\ f^{k+1}}$

b) En passant aux dimension, l'inclusion précédente nous donne

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}\ f^k \leqslant \dim \mathrm{Ker}\ f^{k+1}}$$

c) Supposons que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}\ f^m \neq \mathrm{Ker}\ f^{m+1}$, c'est-à-dire que l'inclusion est stricte, et donc que la suite d'entiers $(\dim \mathrm{Ker}\ f^k)_k$ est strictement décroissante. Comme l'inégalité stricte entraîne

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad (\dim \mathrm{Ker}\ f^k) + 1 \leqslant \dim \mathrm{Ker}\ f^{k+1}$$

Par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad k = (\dim \mathrm{Ker}\ f^0) + k \leqslant \dim \mathrm{Ker}\ f^k$$

Ce qui entraîne en particulier $\dim \mathrm{Ker}\ f^{n+1} \geqslant n + 1 > \dim E$, ce qui est absurde.

En conclusion, $\boxed{\text{Il existe un entier naturel } m \text{ pour lequel } \mathrm{Ker}\ f^m = \mathrm{Ker}\ f^{m+1}}$

d) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad \mathrm{Ker}\ f^{p_0} = \mathrm{Ker}\ f^{p_0+k}$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie.

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } f^{p_0+k+1} &\Longrightarrow f^{p_0+k+1}(x) = f^{p_0+1}(f^k(x)) = 0 \\ &\Longrightarrow f^k(x) \in \text{Ker } f^{p_0+1} = \text{Ker } f^{p_0} \\ &\Longrightarrow f^{p_0}(f^k(x)) = f^{p_0+k}(x) = 0 \\ &\Longrightarrow x \in \text{Ker } f^{p_0+k} \end{aligned}$$

Donc Ker $f^{p_0+k+1} \subset$ Ker f^{p_0+k}. Or, d'après 5)a), Ker $f^{p_0+k} \subset$ Ker f^{p_0+k+1}. D'où l'égalité. En appliquant $\mathcal{H}_k$ il vient

$$\text{Ker } f^{p_0+k+1} = \text{Ker } f^{p_0+k} = \text{Ker } f^{p_0}$$

Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 0 \qquad \text{Ker } f^{p_0} = \text{Ker } f^{p_0+k}}$

e) Soit $x \in$ Im f^{p_0} et $x' \in E$ tel que $x = f^{p_0}(x')$.

$$\begin{aligned} x \in \text{Im } f^{p_0} \cap \text{Ker } f^{p_0} &\Longrightarrow f^{p_0}(x) = f^{2p_0}(x') = 0 \\ &\Longrightarrow x' \in \text{Ker } f^{2p_0} = \text{Ker } f^{p_0} \qquad \text{(d'après d) avec } k = p_0) \\ &\Longrightarrow x = f^{p_0}(x') = 0 \end{aligned}$$

Donc Im $f^{p_0} \cap$ Ker $f^{p_0} \subset \{0_E\}$.
De plus l'intersection de deux sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel et contient donc 0_E. Finalement :

$$\boxed{\text{Im } f^{p_0} \cap \text{Ker } f^{p_0} = \{0_E\}}$$

f) D'après le théorème du rang appliqué à f^{p_0},

$$\dim \text{Im } f^{p_0} + \dim \text{Ker } f^{p_0} = \dim E$$

D'après la question précédente,

$$\text{Im } f^{p_0} \cap \text{Ker } f^{p_0} = \{0_E\}$$

Donc

$$\text{Im } f^{p_0} \oplus \text{Ker } f^{p_0} = E$$

Il reste à prouver que, si $p \in \mathbb{N}$ tel que $p < p_0$, alors Im f^p et Ker f^p ne sont pas supplémentaire dans E. Soit $p \in [\![1, p_0[\![$. Montrons que Im $f^p \cap$ Ker $f^p \neq \{0_E\}$. *Déterminer une intersection est toujours plus facile qu'une somme.*
Par construction de p_0, Ker $f^p \subsetneq$ Ker f^{p+1}. Soit $x \in$ Ker f^{p+1} mais $x \notin$ Ker f^p.
Comme $p \geqslant 1$ et $x \in$ Ker f^{p+1}, $f^p(f^p(x)) = f^{2p}(x) = 0$. Donc $f^p(x) \in$ Ker $f^p \cap$ Im f^p.
Or $x \notin$ Ker f^p, donc $f^p(x) \neq 0$. Ainsi

$$\text{Im } f^p \cap \text{Ker } f^p \neq \{0_E\}$$

Donc Im f^p et Ker f^p ne sont pas en somme directe.
Conclusion : $\boxed{\text{Cet entier } p_0 \text{ est le plus petit entier } p \text{ pour lequel Im } f^p \oplus \text{Ker } f^p = E}$

6) Soit $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice P est diagonale bloc : $P = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

Donc $P^k = \begin{pmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{pmatrix}$. Or, $A_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2^3 = 0$, et par récurrence, $A_1^k = kA_1$.

Par conséquent, $e_6 \notin \text{Ker } f^2$ et $e_6 \in \text{Ker } f^3$. Donc $p_0 \geqslant 3$.
De plus, pour tout $p \geqslant 3$, $P^p = p \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^3$. Ainsi, $p_0 \leqslant 3$. Donc

$$\boxed{p_0 = 3}$$

L'image étant engendré par les vecteurs colonnes,

$$\text{Im } f^3 = \text{Vect}\,(e_1 + e_3) \qquad \text{et} \qquad \text{Ker } f^3 = \text{Vect}\,(e_1 - e_3, e_2, e_4, e_5, e_6)$$

Le noyau s'obtient car $f^3(x) = 0$ pour $x \in \{e_1 - e_3, e_2, e_4, e_5, e_6\}$ et égalité des dimension d'après le théorème du rang.
Ainsi, $\boxed{\text{Ker } f^3 \oplus \text{Im } f^3 = \mathbb{R}^6}$

Exercice 2 (Centrale PC 2019)
I. Exemples de sous-algèbres

I.A - Exemples de sous-algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

1) • Montrons que $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:
Ce sont des parties de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et la matrice nulle est dedans donc elles sont non vides.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $(A, B) \in T_n(\mathbb{K})$:

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad i > j \Longrightarrow a_{ij} = b_{ij} = 0$$

Donc

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad i > j \Longrightarrow \lambda a_{ij} + b_{ij} = 0$$

Donc $\lambda A + B \in T_n(\mathbb{K})$. Ainsi

$$T_n(\mathbb{K}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

De même pour $T_n^+(\mathbb{K})$ en remplaçant l'inégalité stricte qui précède par une inégalité large.

• Montrons que $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont stable par le produit matriciel :
Soit $(A, B) \in T_n(\mathbb{K})$, notons $C = (c_{ij}) = AB$.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=i}^{j} a_{ik} b_{kj} \qquad \text{car} \qquad \begin{cases} a_{ik} = 0 \text{ si } k < i \\ b_{kj} = 0 \text{ si } j < k \end{cases}$$

En particulier, pour $i > j$, $c_{ij} = 0$. Donc $C \in T_n(\mathbb{K})$.
Pour $(A, B) \in T_n^+(\mathbb{K})$, on trouve

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad c_{ij} = \sum_{k=i+1}^{j-1} a_{ik} b_{kj}$$

Donc $c_{ij} = 0$ pour $i \geqslant j - 1$ (non seulement la diagonale est nulle, mais celle au-dessus aussi). Ce qui entraîne $C \in T_n^+(\mathbb{K})$.

Conclusion :

$$\boxed{T_n(\mathbb{K}) \text{ et } T_n^+(\mathbb{K}) \text{ sont des sous-algèbres de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$$

Le rapport de jury conseille – à juste titre – de bien prendre le temps de rédiger correctement la première question : il y a au moins 6 questions du type « est-ce une sous-algèbre », ce qui est logique vu le titre du I. Donc vous vous posez la question « comment rédiger ça » une seule fois pour toute, et vous avez une rédaction parfaite pour les 6 questions (et plus à réfléchir pour les 5 questions qui suivent).

2) $S_2(\mathbb{K})$ et $A_2(\mathbb{K})$ ne sont pas stable par produit : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{K})$:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \notin S_2(\mathbb{K})$$

De même pour $A_2(\mathbb{K})$: $A' = B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in A_2(\mathbb{K})$ et

$$A'B' = -I_2 \notin A_2(\mathbb{K})$$

Conclusion :

$$\boxed{S_n(\mathbb{K}) \text{ et } A_n(\mathbb{K}) \text{ ne sont pas des sous-algèbres de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$$

Il faut prendre des contre-exemples concrets.

3) On utilise des matrices blocs : Soit

$$A_n = \begin{pmatrix} A & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B_n = \begin{pmatrix} B & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$$

$A_n^T = \begin{pmatrix} A^T & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} = A_n$ car $A^T = A$. Donc $A_n \in S_n(\mathbb{K})$. De même, $B_n \in S_n(\mathbb{K})$.
Par produit de matrices diagonales blocs, comme $(AB)^T \neq AB$,

$$A_nB_n = \begin{pmatrix} AB & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \notin S_n(\mathbb{K})$$

Donc $S_n(\mathbb{K})$ n'est pas stable par produit :

$$\boxed{S_n(\mathbb{K}) \text{ n'est pas une sous-algèbre de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$$

De même, pour $A_n(\mathbb{K})$ on raisonne avec des matrices blocs :

$$A'_n = B'_n = \begin{pmatrix} A' & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A'_nB'_n = \begin{pmatrix} -I_2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \notin A_n(\mathbb{K})$$

Donc $A_n(\mathbb{K})$ n'est pas stable par produit :

$$\boxed{A_n(\mathbb{K}) \text{ n'est pas une sous-algèbre de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$$

I.B - Exemples de sous-algèbres de $\mathscr{L}(E)$

4)
- Montrons que $\mathscr{A}_F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$:
  C'est une partie de $\mathscr{L}(E)$, et la fonction nulle $u = 0$ est dedans :

  $$\forall x \in F, \qquad u(x) = 0 \in F \qquad \text{car } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$

  Donc $\mathscr{A}_F \neq \emptyset$.
  Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $(u, v) \in \mathscr{A}_F$:

  $$\forall x \in F \qquad (\lambda u + v)(x) = \lambda u(x) + v(x) \in F$$

  comme combinaison linéaire d'éléments de F car F est un sous-espace vectoriel de E. Donc $\lambda u + v \in \mathscr{A}_F$. Ainsi

  $$\mathscr{A}_F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(E).$$

- Montrons que $\mathscr{A}_F$ est stable par composition :
  Soit $(u,v) \in \mathscr{A}_F^2$.
  $$v(F) \subset F \Longrightarrow u(v(F)) \subset u(F) \subset F$$
  Ce qui entraîne $u \circ v \in \mathscr{A}_F$.

Conclusion :

$$\boxed{\mathscr{A}_F \text{ est une sous-algèbre de } \mathscr{L}(E)}$$

5) Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de F complétée en une base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E.
Notons $A_F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists u \in \mathscr{A}_F / M = \mathrm{Mat}\,(u,\mathscr{B})\}$ l'ensemble des matrices des éléments de $\mathscr{A}_F$ dans la base $\mathscr{B}$.
Les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathscr{A}_F$ et A_F sont isomorphes, nous allons donc déterminer la dimension de A_F.
Montrons que $A_F = \left\{ \begin{pmatrix} M_1 & M_3 \\ 0_{n-p,p} & M_4 \end{pmatrix} \middle| M_1 \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}), M_3 \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}), M_4 \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\}$:

$\boxed{\subset}$ Soit $M = (a_{ij}) \in A_F$, et $u \in \mathscr{A}_F$ l'endomorphisme associé dans la base $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned} \forall j \in [\![1,p]\!], \qquad u(e_j) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i && \text{par définition de la matrice d'une application linéaire dans } \mathscr{B} \\ &= \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e_i && \text{car } e_j \in F \text{ donc } u(e_j) \in F = \mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_p) \end{aligned}$$

Donc $M = \begin{pmatrix} M_1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ avec $M = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.
Conclusion :

$$A_F \subset \left\{ \begin{pmatrix} M_1 & M_3 \\ 0_{n-p,p} & M_4 \end{pmatrix} \middle| M_1 \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}), M_3 \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}), M_4 \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\}$$

$\boxed{\supset}$ Soit $M = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} M_1 & M_3 \\ 0_{n-p,p} & M_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. C'est-à-dire

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![p+1,n]\!], \qquad a_{ij} = 0$$

Ainsi, en notant $u \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme associé dans la base $\mathscr{B}$,

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \qquad u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e_i \in F$$

Soit $x \in F$: $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ par construction de $\mathscr{B}$, et

$$u(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e_i \in F$$

Donc $u \in \mathscr{A}_F$, et $M \in A_F$.
Conclusion :

$$\left\{ \begin{pmatrix} M_1 & M_3 \\ 0_{n-p,p} & M_4 \end{pmatrix} \middle| M_1 \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}), M_3 \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}), M_4 \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\} \subset A_F$$

Ainsi,

$$A_F = \left\{ \begin{pmatrix} M_1 & M_3 \\ 0_{n-p,p} & M_4 \end{pmatrix} \middle| M_1 \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}), M_3 \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}), M_4 \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\}$$

Ce sous-espace vectoriel a pour base $(E_{ij})_{(i,j)\in I}$ avec $I = [\![1,p]\!]^2 \cup ([\![1,n]\!] \times [\![p+1,n]\!])$. Par conséquent,

$$\boxed{\dim \mathscr{A}_F = p^2 + n(n-p) = n^2 - pn + p^2}$$

L'interprétation matricielle de u et sa preuve est du cours.

6) Posons $f(x) = n^2 - xn + x^2$ pour tout $x \in [1, n-1]$.

$$f'(x) = 2x - n$$

Donc

x	1		$n/2$		$n-1$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	n^2-n+1	$\searrow$	$3n^2/4$	$\nearrow$	n^2-n+1

Ainsi,

$$\boxed{\max_{1\leqslant p\leqslant n-1} (n^2 - pn + p^2) = n^2 - n + 1}$$

I.C - Exemples de sous-algèbres de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Ce sont des matrices de similitudes.

7)
- <u>Montrons que $\Gamma(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$</u> :
  C'est une partie de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, et la matrice nulle est dedans ($a = b = 0$), donc $\Gamma(\mathbb{K}) \neq \emptyset$.
  Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $(M, M') \in \Gamma(\mathbb{K})^2$ de coefficients a, b et a', b'.

$$\lambda M + M' = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & -(\lambda b + b') \\ \lambda b + b' & \lambda a + a' \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathbb{K}) \qquad \text{avec } \begin{cases} a'' = \lambda a + a' \\ b'' = \lambda b + b' \end{cases}$$

  Ainsi

$$\Gamma(\mathbb{K}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$$

- <u>Montrons que $\Gamma(\mathbb{K})$ est stable par produit</u> :
  Soit $(M, M') \in \Gamma(\mathbb{K})^2$ de coefficients a, b et a', b'.

$$MM' = \begin{pmatrix} a'' & -b'' \\ b'' & a'' \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathbb{K}) \qquad \text{avec } \begin{cases} a'' = aa' - bb' \\ b'' = ab' + ba' \end{cases}$$

  On reconnaît le produit sur $\mathbb{C}$, l'ensemble $(\Gamma(\mathbb{R}), +, \times)$ est isomorphe à $(\mathbb{C}, +, \times)$.
  Donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est stable par produit.

Conclusion :

$$\boxed{\Gamma(\mathbb{K}) \text{ est une sous-algèbre de } \mathscr{M}_2(\mathbb{K})}$$

8) La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathbb{K})$ a pour polynôme caractéristique $X^2 + 1$, qui n'est pas scindé, donc M n'est pas diagonalisable :

$$\boxed{\Gamma(\mathbb{R}) \text{ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$$

9) Comme $X^2+1=(X-i)(X+i)$, le polynôme caractéristique de $B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ est scindé à racines simples, donc B est diagonalisable :

$$\boxed{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$$

On remarque que $\Gamma(\mathbb{C})=\mathrm{Vect}\,(I_2,B)$. Soit $P\in GL_2(\mathbb{C})$ telle que

$$B=PDP^{-1} \qquad \text{avec } D \text{ diagonale}$$

Alors, pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}^2$,

$$aI_2+bB=aPP^{-1}+bPDP^{-1}=P\Big(aI_2+bD\Big)P^{-1}$$

Donc aI_2+bB est diagonalisable dans la même base que B. Conclusion :

$$\boxed{\Gamma(\mathbb{C}) \text{ est une sous-algèbre diagonalisable de } \mathscr{M}_2(\mathbb{C})}$$

II. Une sous-algèbre commutative de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Ces matrices ont été vues en TD dans le cas de la dimension 3.

II.A - Calcul des puissances de J

10) Cas $n=2$:

$$\varphi(e_1)=e_2 \qquad \text{et} \qquad \varphi(e_2)=e_1$$

Donc

$$\boxed{J=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=J(0,1) \quad \text{et} \quad J^2=I_2}$$

Cas $n>2$:

$$\boxed{J=J(0,1,0,\dots,0)=\begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&0&1\\1&\ddots&&&0\\0&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}}$$

Calcul de J^2 : Pour tout $j\in[\![1,n-2]\!]$, $\varphi^2(e_j)=e_{j+2}$, et $\varphi^2(e_{n-1}=e_1$, $\varphi^2(e_n)=e_2$.
On peut noter à l'aide d'une seule formule grâce à des congruences (comme pour les angles – ce n'est pas un hasard) : $\varphi(e_j)=e_k$ où $k\in[\![1,n]\!]$ tel que $k=j+2[n]$.

$$\boxed{J^2=J(0,0,1,0,\dots,0)=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1&0\\0&&&0&1\\1&\ddots&&&0\\&\ddots&\ddots&&\vdots\\0&&1&0&0\end{pmatrix}}$$

11) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad \forall j\in[\![1,n-k]\!]\,,\ \varphi^k(e_j)=e_{j+k} \quad \text{et} \quad \forall j\in[\![n-k+1,n]\!]\,,\ \varphi^k(e_j)=e_{j+k-n}$$

est vraie pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie pour $k < n$.

$$\begin{aligned} &\forall j \in [\![1, n-k-1]\!], && \varphi^{k+1}(e_j) = \varphi(e_{j+k}) = e_{j+k+1} \\ &\forall j \in [\![n-k+1, n]\!], && \varphi^{k+1}(e_j) = \varphi(e_{j+k-n}) = e_{j+k-n+1} \end{aligned}$$

Et, pour $j = n-k$,

$$\varphi^{k+1}(e_{n-k}) = \varphi(e_n) = e_1 = e_{n-k+k-n+1}$$

Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ vraie.

Par conséquent, $\boxed{J^n = I_n}$ et

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad J^k = J(a_0, \ldots, a_{n-1}) \quad \text{avec} \quad a_k = 1 \text{ et les autres nuls}}$$

12) On remarque, en commençant à numéroter à partir de 0 les positions, que

$$J(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{k-ème position}}, 0, \ldots, 0)$$

Donc, d'après ci-dessus,

$$\boxed{J(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k}$$

II.B - Une base de $\mathscr{A}$

13) Soit $\mathscr{B} = (I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$.

$\underline{\text{Génératrice}}$: D'après 12, $\mathscr{A} = \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$. Donc $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de $\mathscr{A}$.

$\underline{\text{Libre}}$: Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = 0$. Or

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = J(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Donc, en considérant par exemple la première colonne, $\forall k$, $a_k = 0$. Ainsi, $\mathscr{B}$ est libre. Conclusion :

$$\boxed{(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1}) \text{ est une base de } \mathscr{A}}$$

14) $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que M commute avec J.

Alors, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, M commute avec J^k.

Par linéarité du produit à gauche et à droite, M commute donc avec toute combinaison linéaire des J^k, $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Donc, d'après 13, M commute avec tout élément de $\mathscr{A}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que M commute avec tout élément de $\mathscr{A}$.

Alors, en particulier, M commute avec $J \in \mathscr{A}$.

Conclusion :

$$\boxed{M \text{ commute avec } J \text{ si et seulement si } M \text{ commute avec tout élément de } \mathscr{A}}$$

15) Montrons que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:
D'après 13, $\mathscr{A} = \operatorname{Vect} \mathscr{B}$ donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrons que $\mathscr{A}$ est stable par produit :
Soit $M = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$ et $N = \sum_{k=0}^{n-1} b_k J^k$.

$$MN = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k J^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} a_k b_j J^{k+j}$$

Or $J^n = I_n$, donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $J^p = J^k$ avec $p = k[n]$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. D'où $J^p \in \mathscr{A}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, puis $MN \in \mathscr{A}$ comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{A}$.

$$\mathscr{A} \text{ est stable par produit}$$

Montrons que $\mathscr{A}$ est commutative : Montrons qu'un élément $M \in \mathscr{A}$ quelconque commute avec tout élément de $\mathscr{A}$. D'après 14, c'est équivalent à montrer que M commute avec J. Avec $M = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$,

$$JM = J\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k J = MJ$$

Donc M et J commutent, donc (14) M commute avec tout élément de $\mathscr{A}$, donc

$$\boxed{\mathscr{A} \text{ est une sous-algèbre commutative de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

II.C - Diagonalisation de J

16) Développons par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned}
\chi_J(x) &= \det(xI_n - J) \\
&= \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix} \\
&= x(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix} - 1 \times (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x & -1 \end{vmatrix} \\
&= x^n - 1
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\chi_J(x) = x^n - 1}$$

17) Les racines du polynôme $x^n - 1$ sont les racines n-ème de l'unité, c'est-à-dire les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
Donc χ_J est scindé à racines simples :

$$\boxed{J \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$$

18) Si $n=2$, $x^2-1=(x-1)(x+1)$: le polynôme caractéristique est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et J diagonalisable.

Si $n>2$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}} \notin \mathbb{R}$ car $\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) > 0$. Donc, dans ce cas, J n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La matrice } J \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } n=2}$$

19) Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, d'après 17

$$\boxed{\operatorname{Sp}(J) = \{\omega^k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}}$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, calculons $E_{\omega^k} = \operatorname{Ker}(\omega^k I_n - J)$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_{\omega^k} \iff JX = \omega^k X$$

$$\iff \begin{cases} x_n = \omega^k x_1 \\ x_1 = \omega^k x_2 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} = \omega^k x_n \end{cases} \qquad \text{or } x_n = \omega^k x_1 = \cdots = (\omega^k)^n x_n = x_n$$

$$\iff \begin{cases} x_n = x_n \\ x_{n-1} = \omega^k x_n \\ x_{n-2} = \omega^{2k} x_{n-1} \\ \quad\vdots \\ x_1 = \omega^{(n-1)k} x_n \end{cases}$$

$$\iff X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Les espaces propres associés sont donc

$$\boxed{E_{\omega^k} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

II.D - Diagonalisation de $\mathscr{A}$

20) Ce sous-ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Il n'est pas stable par produit par des complexes non réels :

$$I_n \in \mathscr{A} \qquad \text{mais} \qquad iI_n \notin \mathscr{A}$$

Donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel :

$$\boxed{\text{Le sous-ensemble } \mathscr{A} \text{ n'est pas une sous-algèbre de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$$

21) D'après 17, J est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$: soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$J = PDP^{-1} \qquad \text{avec} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit $A \in \mathscr{A}$. D'après 13, $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$ avec $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Donc, en remplaçant,

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P D^k P^{-1} = P \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k \right) P^{-1} = P D' P^{-1}$$

Avec $D' = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k$ diagonale comme combinaison linéaire de matrices diagonales. Conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe } P \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ telle que, pour toute matrice } A \in \mathscr{A}, \text{ la matrice } P^{-1}AP \text{ est diagonale.}}$$

22) D'après le calcul ci-dessus,

$$J(a_0, \ldots, a_{n-1}) = P \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k \right) P^{-1} = P D' P^{-1} \quad \text{avec} \quad D' = \begin{pmatrix} Q(1) & & & \\ & Q(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}\left(J(a_0, \ldots, a_{n-1})\right) = \{Q(\omega^k) \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}}$$