 

# Devoir de Mathématiques numéro 4

## Exercice 1

Dans tout l'exercice, $n$ est un entier supérieur ou égal à 1 et $E$ est un espace vectoriel de dimension $n$. On note $\mathrm{id}_E$ l'endomorphisme identité de $E$. Si $f$ est un endomorphisme de $E$, on pose $f^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout entier $m \geqslant 1$, $f^m = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ fois}}$. On note $0_{\mathscr{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de $E$.

L'objectif de cet exercice est de montrer que, pour tout endomorphisme $f$ non nul de $E$, il existe un entier naturel $p$ non nul tel que $\mathrm{Ker}\ f^p \oplus \mathrm{Im}\ f^p = E$ et de déterminer l'entier $p_0$ qui est le plus petit des entiers pour lesquels cette égalité est vérifiée.

**1)** **a)** On suppose que $f$ est bijectif. Déterminer $p_0$.

**b)** On suppose que $f$ est diagonalisable et non bijectif. Montrer que $\mathrm{Ker}\ f \oplus \mathrm{Im}\ f = E$.
Déterminer $p_0$.

**2)** Soit $f$ un endomorphisme de $E$ vérifiant la relation $f \circ (f - \mathrm{id}_E)^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

**a)** Calculer $(f - \mathrm{id}_E)^2 + f \circ (2\,\mathrm{id}_E - f)$. (On justifiera l'usage de l'identité remarquable).

**b)** En déduire que $\mathrm{Ker}\ f \oplus \mathrm{Im}\ f = E$. Déterminer $p_0$.

**3)** Soit $m$ un entier supérieur ou égal à 1. On suppose dans cette question l'existence de réels $a_1, a_2, \ldots, a_m$, avec $a_1 \neq 0$, vérifiants la relation $a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_m f^m = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que $\mathrm{Ker}\ f \oplus \mathrm{Im}\ f = E$.

**4)** On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}^4$ et on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice $A$ dans la base $\mathscr{B}$ est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**a)** Vérifier que $\mathrm{Im}\ f \cap \mathrm{Ker}\ f \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$

**b)** Calculer $A^2$ et $A^3$. En déduire le plus petit des entiers $p$ pour lesquels on a $\mathrm{Ker}\ f^p \oplus \mathrm{Im}\ f^p = \mathbb{R}^4$

**5)** Dans cette question, on revient au cas général où $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f$ un endomorphisme non nul de $E$.

**a)** Établir pour tout entier naturel $k$ l'inclusion $\mathrm{Ker}\ f^k \subset \mathrm{Ker}\ f^{k+1}$.

**b)** Comparer les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}\ f^k$ et $\mathrm{Ker}\ f^{k+1}$.

**c)** À l'aide d'une démonstration par l'absurde et en raisonnant sur les dimensions, montrer qu'il existe un entier naturel $m$ pour lequel $\mathrm{Ker}\ f^m = \mathrm{Ker}\ f^{m+1}$.

**d)** On note $p_0$ le plus petit des entiers naturels $p$ pour lesquels $\mathrm{Ker}\ f^p = \mathrm{Ker}\ f^{p+1}$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $k$, on a $\mathrm{Ker}\ f^{p_0} = \mathrm{Ker}\ f^{p_0+k}$.

**e)** Montrer que $\mathrm{Im}\ f^{p_0} \cap \mathrm{Ker}\ f^{p_0} = \{0_E\}$.

**f)** En déduire que cet entier $p_0$ est le plus petit entier $p$ pour lequel $\mathrm{Im}\ f^p \oplus \mathrm{Ker}\ f^p = E$.

**6)** Exemple. On suppose que $E = \mathbb{R}^6$ et que la matrice $P$ de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^6$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $p_0$ le petit des entiers naturels $p$ tels que $\mathrm{Ker}\ f^p = \mathrm{Ker}\ f^{p+1}$.
Vérifier que $p_0 = 3$ et que $\mathrm{Ker}\ f^3 \oplus \mathrm{Im}\ f^3 = \mathbb{R}^6$.

## **Exercice 2** (Type Centrale)

Calculatrices autorisées

### Réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

On note $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de $E$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à $n$ lignes et $n$ colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice, dans la base $\mathcal{B}$ de $E$, de l'endomorphisme $u$ de $\mathcal{L}(E)$.

La matrice transposée de toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $M^T$.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(E)$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable pour la composition, c'est-à-dire que $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ quels que soient les éléments $u$ et $v$ de $\mathcal{A}$. (Remarquer qu'on ne demande pas que $\mathrm{id}_E$ appartienne à $\mathcal{A}$).

On dit qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est *commutative* si pour tous $u$ et $v$ dans $\mathcal{A}$, $u \circ v = v \circ u$.

Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dite *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure) pour tout $u$ de $\mathcal{A}$.

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite *commutative* si, pour toutes matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{A}$, $AB = BA$. Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice $M$ de $\mathcal{A}$, $P^{-1}MP$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

Si $\mathcal{B}$ est une base de $E$, l'application $Mat_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une bijection qui envoie une sous-algèbre (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable) de $\mathcal{L}(E)$ sur une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable).

Un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est *strict* si $F$ est différent de $E$.

On désigne par $S_n(\mathbb{K})$ (respectivement $A_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement antisymétriques). On désigne par $T_n(\mathbb{K})$ (respectivement $T_n^+(\mathbb{K})$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

*Toute réponse doit être justifiée : le cas échéant, il faut prouver point par point toutes les propriétés qui justifient votre affirmation.*

## I. Exemples de sous-algèbres

### I.A - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

**1)** Les sous-ensembles $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ?

**2)** Les sous-ensembles $S_2(\mathbb{K})$ et $A_2(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ?

**3)** On suppose $n \geqslant 3$. Les sous-ensembles $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ?

### I.B - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $p$ et $\mathcal{A}_F$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ qui stabilisent $F$, c'est-à-dire $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) | u(F) \subset F\}$.

**4)** Montrer que $\mathcal{A}_F$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

**5)** Montrer que $\dim \mathcal{A}_F = n^2 - pn + p^2$.
*On pourra considérer une base de $E$ dans laquelle la matrice de tout élément de $\mathcal{A}_F$ est triangulaire par blocs.*

**6)** Déterminer $\max\limits_{1 \leqslant p \leqslant n-1} (n^2 - pn + p^2)$.

### I.C - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

**7)** Montrer que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

**8)** Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**9)** Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En déduire que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

## II. Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose $n \geqslant 2$.

Pour tout $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le coefficient d'indice$(i,j)$ de $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ est $a_{i-j}$ si $i \geqslant j$ et $a_{i-j+n}$ si $i < j$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ où $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, \dots n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

### II.A - Calcul des puissances de $J$

**10)** Préciser les matrices $J$ et $J^2$. (on pourra distinguer les cas $n = 2$ et $n > 2$).

**11)** Préciser les matrices $J^n$ et $J^k$ pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

**12)** Quel est le lien entre la matrice $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ et les $J^k$, où $0 \leqslant k \leqslant n-1$ ?

### II.B - Une base de $\mathcal{A}$

**13)** Montrer que $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est une base de $\mathcal{A}$.

**14)** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M$ commute avec $J$ si et seulement si $M$ commute avec tout élément de $\mathcal{A}$.

**15)** Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

### II.C - Diagonalisation de $J$

**16)** Déterminer le polynôme caractéristique de $J$.

**17)** Montrer que $J$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**18)** La matrice $J$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?

**19)** Déterminer les valeurs propres complexes de $J$ est les espaces propres associés.

### II.D - Diagonalisation de $\mathcal{A}$

**20)** Le sous-ensemble $\mathcal{A}$ est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ?

**21)** Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On note $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

**22)** Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ ?