# Devoir de Mathématiques numéro 4

---

**Exercice 1** (EDHEC, ECE 2016) **1)** $A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} - 4A = 4I_3$

Par conséquent $\boxed{\text{Le polynôme } P = X^2 - 4X - 4 \text{ vérifie } P(A) = 0}$

**2)** D'après 1), $A^2 - 4A = -4I_3$ donc, en divisant par 4,

$$(-\frac{1}{4}A + I_3)A = A(-\frac{1}{4}A + I_3) = I_3$$

Conclusion : $\boxed{A \text{ est inversible d'inverse } -\frac{1}{4}A + I_3}$

**3)** Division euclidienne : il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$X^n = PQ + R \qquad \text{avec} \qquad \deg R < \deg P \tag{1}$$

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}[X]$ qui conviennent. Comme $\deg R \leqslant 1$,

$$R = aX + b$$

Comme $P = (X - 2)^2$, $\lambda = 2$ est racine double de $P$. Ainsi

$$P(2) = 0 \qquad \text{et} \qquad P'(2) = 0$$

Si on dérive l'égalité (1), il vient $nX^{n-1} = P'Q + PQ' + R'$, puis en évaluant (1) et cette nouvelle équation en $X = 2$,

$$\begin{cases} 2^n = P(2)Q(2) + R(2) = R(2) = 2a + b \\ n2^{n-1} = P'(2)Q(2) + P(2)Q'(2) + R'(2) = R'(2) = a \end{cases}$$

En résolvant ce système, il vient $a = n2^{n-1}$ et $b = (1 - n)2^n$, donc

$$\boxed{R = n2^{n-1}X + (1 - n)2^n}$$

*Cette méthode est très générale : lorsque vous avez $P$ tel que $P(A) = 0$, vous cherchez ses racines $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. En effectuant la division euclidienne $X^n = PQ + R$ puis en évaluant en $X = \lambda_i$ (quitte à dériver en cas de racines multiples) on trouve le bon nombre d'équations pour déterminer les coefficients de $R$.*

**4)** En évaluant (1) en $X = A$, il vient, comme $P(A) = 0$,

$$\boxed{A^n = P(A)Q(A) + R(A) = 0 + R(A) = n2^{n-1}A + (1 - n)2^n I_3}$$

On vérifie que cette formule est vraie en $n = 0$. *Vérification : toujours penser à tester (au brouillon) pour $n = 0$ et $n = 1$.*

*Là aussi, la méthode est généralisable. Attention, les seules racines de $P$ sont des réels ou des complexes.*

**5)** D'après 2), $A^{-1} = -2^{-2}A + I_3 = (-1)2^{-1-1}A + (1 - (-1))2^{-1}I_3$. Donc la formule précédente reste valable pour $n = -1$.

On montre par récurrence sur $n$ que $A^{-n} = (-n)2^{-n-1}A + (1 + n)2^{-n}I_3$ (à faire).

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad A^n = n2^{n-1}A + (1 - n)2^n I_3}$

## Exercice 2 (PT 2012)

**Partie 1** **1)** $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = BA$ donc $\boxed{f \text{ et } g \text{ commutent.}}$

**2)** • <u>Étude de $f$</u> : Le polynôme caractéristique de $f$ est

$$\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = -(\lambda - 1)^3$$

*On a une matrice diagonale bloc. On peut aussi développer par rapport à la première colonne. Puis calculer le déterminant $2 \times 2$ sans plus se compliquer la vie.*

Donc 1 est valeur propre triple. Si $A$ est diagonalisable, Comme $A \neq I_3$, $A$ serait semblable à $1 \times I_3$ et donc égal à $I_3$, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent,

$$\boxed{A \text{ est n'est pas diagonalisable}}$$

Par contre le polynôme caractéristique de $f$ est *scindé*, donc

$$\boxed{A \text{ est trigonalisable}}$$

Calcul de $E_1(f)$ *...après calculs...* $\boxed{E_1(f) = \operatorname{Vect}\Big((1,0,0),(0,1,-1)\Big)}$.

• <u>Étude de $g$</u> : Polynôme caractéristique de $g$ :

$$\begin{aligned}
\chi_g(x) &= \det(x \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3} - g) \\
&= \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ -1 & -1 & x-3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ -1 & -x+2 & x-3 \end{vmatrix} \qquad C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\
&= (x-2) \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x-3 \end{vmatrix} \\
&= (x-2) \left|\begin{array}{cc|c} x & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & x-2 \end{array}\right| \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
&= x(x-2)^2
\end{aligned}$$

Donc les valeurs propres sont : $\left\{ \begin{array}{lcll} \lambda & = & 0 & \text{de multiplicité} \quad \alpha = 1 \\ \lambda & = & 2 & \text{de multiplicité} \quad \alpha = 2 \end{array} \right.$.

Sous-espaces propres : *...après calculs...*

$$\boxed{E_0(g) = \operatorname{Ker} g = \operatorname{Vect}\Big((2,1,-1)\Big)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{E_2(g) = \operatorname{Vect}\Big((0,1,-1)\Big)}$$

Comme $\dim E_0(g) + \dim E_2(g) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$,

$$\boxed{B \text{ est n'est pas diagonalisable}}$$

(on pouvait conclure dès que $\dim E_2(g) = 1 < \alpha_2 = 2$).
Par contre le polynôme caractéristique de $g$ est *scindé*, donc

$$\boxed{B \text{ est trigonalisable}}$$

**3)** Soit $e_1 = (0,1,-1) \in E_2(g)$ et

$$\boxed{e_2 = (2,1,-1)}$$

$e_2$ n'est pas colinéaire à $e_1$ car $e_1 \in E_2(g)$ et $e_2 \in E_0(g)$, or $E_\lambda \cup E_\mu = \{0\}$ si $\lambda \neq \mu$. *(Il y a beaucoup d'autre arguments : $e_1 \wedge e_2 \neq 0$, $e_2 - e_1 = (2,0,0) \neq \lambda e_i$, etc...)*

Soit $x = \alpha e_1 + \beta e_2 \in \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$,

Comme $e_2 = 2(1,0,0) + (0,1,-1) \in E_1(f)$, et $e_1 \in E_1(f)$ par construction,

$$x = \alpha e_1 + \beta e_2 \in E_1(f)$$

D'où

$$f(x) = x \in \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$$

*On a même $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2) = E_1(f)$ pour des raisons dimensionnelles.*

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha g(e_1) + \beta g(e_2) \\ &= 2\alpha e_1 + 0 \times \beta e_2 \qquad (\text{car } e_1 \in E_2(g) \text{ et } e_2 \in E_0(g)) \\ &= 2\alpha e_1 \in \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2) \text{ stable par } f \text{ et } g}$

**4)** Posons $e_3 = (0,0,1)$. Montrons que $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base : soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det P = \left|\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 \end{array}\right| = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

Donc $\mathscr{B}'$ est une base. De plus

$\left\{ \begin{array}{rcl} f(e_1) & = & e_1 \\ f(e_2) & = & e_2 \end{array} \right.$ donc $\mathrm{Mat}\,(f, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$. *(comme la matrice est triangulaire, les valeurs propres sont sur la diagonale et la dernière $*$ en bas vaut 1 : ce n'est pas demandé)*

De même, $\left\{ \begin{array}{rcl} g(e_1) & = & 2e_1 \\ g(e_2) & = & 0 \end{array} \right.$ donc $\mathrm{Mat}\,(g, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$. *(idem avec 2 au lieu de 1)*

Conclusion : $\boxed{\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de trigonalisation commune à } f \text{ et } g}$

**Partie 2** **1)** L'endomorphisme $f$ possède $n$ valeurs propres distinctes, il est donc diagonalisable.

**2)** **a)** Par linéarité de $f$, $f \circ u = f \circ \left( \sum_{i=0}^{d} a_i f^i \right) = \sum_{i=0}^{d} a_i f \circ f^i = \sum_{i=0}^{d} a_i f^{i+1}$.

Par définition de la somme et du produit par un scalaire sur les fonctions, $u \circ f = \sum_{i=0}^{d} a_i f^{i+1}$.

Donc $f \circ u = u \circ f$.

Finalement, $\boxed{f \text{ et } u \text{ commutent}}$

**b)** Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Posons $\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ la base de vecteurs propres du 1).

Comme $f(e_k) = \lambda_k e_k$, par une récurrence immédiate $f^i(e_k) = \lambda_k^i e_k$.

En combinant on trouve $u(e_k) = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i(e_k) = \sum_{i=0}^{d} a_i \lambda_k^i e_k = \left( \sum_{i=0}^{d} a_i \lambda_k^i \right) e_k = P(\lambda_k) e_k$

Donc dans la base $\mathscr{B}'$ la matrice de $u$ s'écrit $\mathrm{Mat}\,(u, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$

En conclusion, les valeurs propres de $u$ sont les $(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$ et $u$ est diagonalisable dans la même base $\mathscr{B}'$ que $f$.

*On peut aussi remarquer que* $\mathrm{Mat}\,(P(f),\mathscr{B}') = P(\mathrm{Mat}\,(f,\mathscr{B}'))$*. Or* $D = \mathrm{Mat}\,(f,\mathscr{B}')$ *est diagonale, donc* $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$*. Puis le résultat.*

**3)** **a)** Chacune des valeurs propres $\lambda_i$ est de multiplicité $\alpha_i = 1$, car il y a $n$ valeurs propres et la somme des multiplicités doit être égale à $n$. Ainsi $1 \leqslant \dim E_{\lambda_i} \leqslant \alpha_i = 1$.

$$\boxed{\dim E_{\lambda_i} = 1}$$

**b)** Nous avons vu en exercice que « $f$ et $g$ commutent » entraîne « les sous-espaces propres de $f$ sont stables par $g$ (et vis versa) ». Ce n'est évidemment pas un résultat utilisable sans démonstration dans une copie. Dans le sujet de 2012, la question était posée en préliminaire, donc il suffisait de citer le résultat de cette question.

Comme $f$ et $g$ commutent, les sous-espaces propres de $f$ sont stables par $g$ (préliminaire) : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $g(E_{\lambda_i}) \subset E_{\lambda_i}$.

En particulier, comme $E_{\lambda_i} = \mathrm{Vect}\,(e_i)$, $g(e_i) \in \mathrm{Vect}\,(e_i)$.

Ce qui nous donne finalement $g(e_i) = \mu_i e_i$ :

$$\boxed{e_i \text{ est également un vecteur propre de } g}$$

**c)** Ainsi, d'après b), la matrice de $g$ dans $\mathscr{B}'$ est

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{\text{L'endomorphisme } g \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{B}'}$

**d)** Soit $P$ le polynôme interpolateur de Lagrange qui vérifie $P(\lambda_i) = \mu_i$ pour tout $i$ :

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

Ce polynôme est bien défini car les $\lambda_i$ sont deux à deux distincts par hypothèse. De plus,

$$\boxed{\deg P = n - 1}$$

Dans la base $\mathscr{B}'$, notons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ la matrice de $f$.

D'après 2)b), $\mathrm{Mat}\,(P(f),\mathscr{B}') = P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$ par construction de $P$.

Or d'après 3)c), $\mathrm{Mat}\,(g,\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$. Donc $\mathrm{Mat}\,(g,\mathscr{B}') = \mathrm{Mat}\,(P(f),\mathscr{B}')$.

Par conséquent, les endomorphismes ayant la même matrice dans la même base, ils sont égaux :

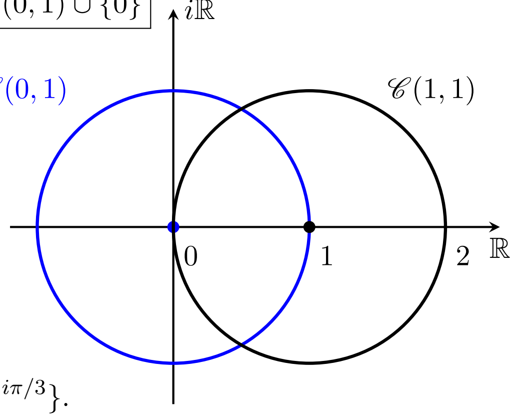
$$\boxed{g = P(f)}$$

## Exercice 3 (Oral)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.
Si $P = c$ est un polynôme constant, alors l'équation s'écrit $c = c^2$ et les seules solutions sont $c = 0$ ou $c = 1$.
Supposons désormais $\deg P \geqslant 1$.
Notons $Z(P)$ l'ensemble des racines (complexes) de $P$.

- Soit $\alpha \in Z(P)$. Alors $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha+1) = 0$, donc $\alpha^2$ est aussi une racine de $P$.
  Par récurrence, $\alpha^{2^n}$ est une racine de $P$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Or $P$ a un nombre fini de racines. Donc les $\alpha^{2^n}$ ne peuvent pas être des nombres tous distincts. Une des conséquences est que $|\alpha| = 1$ ou $\alpha = 0$.
  Si on note $\mathscr{C}(0,1)$ le cercle de centre 0 et de rayon 1, $\boxed{Z(P) \subset \mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}}$

- Soit $\alpha \in Z(P)$.
  Alors $P\Big((\alpha-1)^2\Big) = P(\alpha-1)P(\alpha) = 0$, donc $(\alpha-1)^2 \in Z(P)$.
  Or $Z(P) \subset \mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}$, donc $(\alpha-1)^2 \in \mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}$,
  c'est-à-dire $|\alpha - 1| = 1$ ou $(\alpha - 1) = 0$.
  Ainsi, $\alpha \in \mathscr{C}(1,1)$ ou $\alpha = 1$.
  Par conséquent, $\boxed{Z(P) \subset \mathscr{C}(1,1) \cup \{1\}}$




- Ainsi, $\mathbb{Z}(P) \subset \Big(\mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}\Big) \cap \Big(\mathscr{C}(1,1) \cup \{1\}\Big) = \{0, 1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\}$.
  Si $\alpha = e^{i\pi/3}$, $\alpha^2 = e^{2i\pi/3} \notin Z(P)$, alors que d'après le premier point $\alpha^2 \in Z(P)$. Par conséquent $e^{i\pi/3}$ est à exclure, et de même $e^{-i\pi/3}$. Il reste donc :
  $$\boxed{Z(P) \subset \{0,1\}}$$

- D'après ci-dessus, les seules racines possibles de $P$ sont 0 et 1.
  Donc $P(X) = cX^p(X-1)^q$ avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}^*$.
  L'équation fonctionnelle s'écrit donc :
  $$P(X^2) = cX^{2p}(X^2-1)^q = c^2X^p(X-1)^q(X+1)^pX^q = P(X)P(X+1)$$
  En décomposant $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, l'égalité précédente s'écrit :
  $$cX^{2p}(X-1)^q(X+1)^q = c^2X^{p+q}(X-1)^q(X+1)^p$$
  En identifiant (par unicité de la décomposition en facteurs $(X-\lambda)^\alpha$), il vient $c = 1$, $2p = p+q$, $q = q$ et $q = p$. Donc $P = X^p(X-1)^p$.
  Réciproquement, $P = X^p(X-1)^p$ vérifie $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Conclusion : $\boxed{\text{Les polynômes } P \text{ vérifiant } P(X^2) = P(X)P(X+1) \text{ sont } P = 0, \text{ et } P = X^p(X-1)^p \text{ avec } p \in \mathbb{N}.}$

## Exercice 4 (Centrale PC 2015 – corrigé UPS)

### Partie 1

**I.A -** Si $F = \mathrm{Vect}\,(u)$ est stable par $f$, $f(u) \in \mathrm{Vect}\,(u)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Puisque $F$ est une droite vectorielle engendré par $u$, u est non nul donc $u$ est bien un vecteur propre de $f$. Réciproquement si $u$ est un vecteur propre de $f$ associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. $u \neq 0_E$ donc $\mathrm{Vect}\,(u)$ est une droite vectorielle. De plus, si $v \in \mathrm{Vect}\,(u)$, il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $v = ku$. Par suite, $f(v) = \lambda ku$ donc $f(v) \in \mathrm{Vect}\,(u)$. $\mathrm{Vect}\,(u)$ est donc stable par $f$.

**I.B -**

**I.B.1)** Les sous-espaces $\{0_E\}$ et $E$ sont clairement stables par $F$, il y a donc au moins deux sous-espaces stables par $F$.
Considérons l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Si $F$ est un sous-espace vectoriel stable autre que $\{0_E\}$ et $E$ alors $\dim(F) = 1$. D'après I.A, $f$ admet alors un vecteur propre associé à une valeur propre réelle.
Le polynôme caractéristique de $f$ est $X^2 + 1$. Celui-ci n'a pas de racines réelles, $f$ n'admet donc pas de valeurs propres réelles puisqu'elles sont racines du polynôme caractéristique.

$$\boxed{f \text{ n'a donc que } \{0_E\} \text{ et } E \text{ comme sous-espaces propres stables.}}$$

**I.B.2)** Ici $n \geqslant 2$. Si $f$ est non nul, $\mathrm{Ker}\,(f) \neq E$ et si $f$ est non injective $f \neq \{0_E\}$. De plus, $f(\mathrm{Ker}\,(f)) = \{0_E\}$ donc $\mathrm{Ker}\,(f)$ est stable par $f$. Ainsi $f$ admet au moins trois sous-espaces stables,

$$\boxed{\{0_E\},\ E \text{ et } \mathrm{Ker}\,(f)}$$

Remarque : $n \geqslant 2$ est nécessaire car sinon on a $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$ ou $\mathrm{Ker}\,(f) = E$.
Supposons de plus $n$ impair. On a $f(\mathrm{Im}\,(f)) = \{f(f(u))\,;\, u \in E\} \subset \mathrm{Im}\,(f)$, $\mathrm{Im}\,(f)$ est donc stable par $f$. Comme $f$ est non injective, $f$ étant un endomorphisme sur un espace de dimension finie $f$ est non surjective donc $\mathrm{Im}\,(f) \neq E$. $f$ est non nul donc $\mathrm{Im}\,(f) \neq \{0_E\}$. D'après le théorème du rang $n = rg(f) + \dim(\mathrm{Ker}\,(f))$. Par suite, si $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f)$ on a $n = 2rg(f)$ et donc $n$ est pair. Ce n'est pas le cas donc $\mathrm{Im}\,(f) \neq \mathrm{Ker}\,(f)$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f) \text{ est un quatrième sous-espace propre qui s'ajoute au trois autres}}$$

Considérons l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice représentative dans la base canonique $(e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$f$ est non nul, non injective car $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(e_1)$ donc $f$ admet au moins trois sous-espaces stables.
Supposons que $F$ soit un autre sous-espace stable par $f$. On a alors $\dim(F) = 1$ et de I.A. $F$ est engendré par un vecteur propre de $f$. Le polynôme caractéristique de $f$ est $X^2$. $f$ admet donc comme seule valeur propre 0 donc $F = \mathrm{Ker}\,(f)$.

$$\boxed{\text{Il n'y a donc que trois sous-espaces stables par } f}$$

**I.C -**

**I.C.1)** Soient $(u_1, u_2, \cdots, u_k)$ une famille de $k$ vecteurs propres de $f$ associés respectivement à des valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ et $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, \cdots, u_k)$

Soit $u \in F$. Il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k) \in \mathbb{K}^k$ tel que $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$. On a alors $f(u) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i u_i$ donc $f(u) \in F$. Ainsi

$$\boxed{F \text{ est stable par } f.}$$

L'endomorphisme induit par $f$ sur un sous-espace propre $F$ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ est

$$\boxed{\lambda Id_F}$$

**I.C.2)** Soit $F$ un sous-espace stable de $f$ de dimension au moins 2. Soit $(u, v)$ une famille libre de $F$. On vérifie alors que pour tout $(a, b) \in (K^*)^2$ avec $a \neq b$, la famille $(u + av, u + bv)$ est libre.
La famille $(\mathrm{Vect}\,(u + av))_{a \in \mathbb{K}^*}$ est donc une famille de droites vectorielles deux à deux distinctes, il y en a donc une infinité. De plus, $u$ est $v$ sont des vecteurs propres donc, d'après I.C.1) $\mathrm{Vect}\,(u + av)$ est stable par $f$ pour tout $a \in \mathbb{K}^*$. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ admet une infinité de droites vectorielles stables par } f}$$

**I.C.3)** Si tout sous-espace vectoriel de $f$ est stable par $f$ toute droite vectorielle l'est aussi et donc tout vecteur de $E$ est vecteur propre de $f$. Montrons que $f$ admet une seule valeur propre.
Soit, pour tout $u \in E$, $\lambda_u \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda_u u$. Soit $(u, v) \in E^2$.
Supposons $(u, v)$ libre. On a $f(u+v) = \lambda_{u+v}(u+v) = \lambda_u u + \lambda_v v$ donc $(\lambda_{u+v} - \lambda_u)u + (\lambda_{u+v} - \lambda_v)v = 0_E$.
La liberté de $(u, v)$ impose $\lambda_{u+v} = \lambda_u = \lambda_v$.
Supposons $(u, v)$ liée. Si $u = 0_E$, on a $f(u) = \lambda_v 0_E$ et on peut convenir que $\lambda_u = \lambda_v$. On peut conclure la même chose si $v = 0_E$.
Si $u \neq 0_E$ et $v \neq 0_E$, il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $v = \alpha u$. Par suite, $f(v) = \alpha f(u) = \alpha \lambda_u u$ et $f(v) = \lambda_v v = \alpha \lambda_v u$. Comme $u \neq 0_E$, $\alpha \lambda_u = \alpha \lambda_v$ et comme $\alpha \neq 0$, $\lambda_u = \lambda_v$.
Ainsi, $f$ n'admet qu'une seule valeur propre et comme tout vecteur de $E$ est vecteur propre

$$\boxed{f \text{ est une homothétie vectorielle de rapport cette valeur propre.}}$$

**I.D -**

**I.D.1)** Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une base de vecteurs propres de $f$. Cette famille existe puisque $f$ est diagonalisable. Soit $F$ un sous-espace stable par $f$. Si $F = \{0_E\}$ ou $F = E$, on a immédiatement des sous espaces stables par $f$ et supplémentaire de $F$ à savoir respectivement $E$ et $\{0_E\}$. Supposons $F \neq \{0_E\}$ et $F \neq E$.

Comme $f$ est diagonalisable, l'endomorphisme $f_{|F}$ induit par $f$ sur $F$ est aussi diagonalisable. Soit $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ une base de vecteurs propres de $F$ pour $f_{|F}$, $k$ étant donc la dimension de $F$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut adjoindre des vecteurs de $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ à $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ de sorte à obtenir une base de $E$. Soit $(u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_{n-k}})$ une telle famille de vecteurs. Par suite, $\mathrm{Vect}\left((u_{i_1}, \cdots, u_{i_2}, \cdots, u_{i_{n-k}})\right)$ est un supplémentaire de $F$ et d'après I.C.1) est stable par $f$.

**I.D.2)** Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. D'après le théorème de De d'Alembert-Gauss, le polynôme caractéristique de $f$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$ donc $f$ admet au moins un vecteur propre. Soit $F$ la somme directe des sous-espaces propres de $f$. $F \neq \{0_E\}$ d'après ce qui précède.

Supposons $F \neq E$. $F$ admet un supplémentaire $G$ stable par $G$ et $G \neq \{0_E\}$ car $F \neq E$. L'endomorphisme $f_{|G}$ a aussi un polynôme caractéristique scindé dans $\mathbb{C}$ et donc un vecteur propre $u$. $u$ est alors immédiatement vecteur propre de $f$ et est donc dans $F$. Or, $F$ et $G$ sont supplémentaires donc $u = 0_E$ ce qui est contradictoire avec $u$ vecteur propre. Ainsi $F = E$ et donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

$\boxed{\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \text{ on ne peut pas conclure que } f \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R}}$. Prenons par exemple l'endomorphisme de la question I.B.1) pour lequel les seuls sous-espaces stables sont $\{0_E\}$ et $E$ et donc tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable et cet endomorphisme n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

## Partie 2

**II.A -)**

**II.A.1)** Soit $u \in F$. Il existe $(u_i)_{i\in\{1,\cdots,p\}} \in \displaystyle\prod_{i=1}^{p} F \cap E_i$ tel que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} u_i$.

Par suite, $f(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$. Comme, pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$, $F$ et $E_i$ sont des sous-espaces vectoriels $F \cap E_i$ l'est aussi et donc $\lambda_i u_i \in F \cap E_i$.

Ainsi $f(u) \in \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F \cap E_i$. $\boxed{F = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F \cap E_i \text{ est donc stable par } f.}$

**II.A.2)** Les valeurs propres $(\lambda_i)_{i\in\{1,\cdots,p\}}$ dont deux à deux distinctes donc les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in\{1,\cdots,p\}}$ sont en somme directe. De plus, $f$ est diagonalisable donc $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{il existe } (x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in \prod_{i=1}^{p} E_i \text{ unique tel que } x = \sum_{i=1}^{p} x_i.}$$

**II.A.3)** $(x_1, \cdots, x_r)$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes donc c'est une famille libre. De plus, $(x_1, \cdots, x_r)$ est immédiatement une famille génératrice de $\mathrm{Vect}\,(x_1, \cdots, x_r)$ donc $\boxed{(x_1, \cdots, x_r) \text{ est une base de } V_x.}$

**II.A.4)** On a, pour tout $j \in \{1, \cdots, r\}$, $f^{j-1}(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{j-1} x_i \in V_x$. La matrice de $(f^{j-1}(x))_{j\in\{1,\cdots,r\}}$ dans la base $\mathcal{B}_x$ est $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \lambda_r^2 & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}}$.

**II.A.5)** Le déterminant de la matrice de $(f^{j-1}(x))_{j\in\{1,\cdots,r\}}$ dans la base $\mathcal{B}_x$ est un déterminant de Vandermonde qui vaut : $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_j-\lambda_i)$. Comme $(\lambda_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ est une famille de scalaires deux à deux distincts, ce déterminant est non nul. Par suite, la famille $(f^{j-1}(x))_{j\in\{1,\cdots,r\}}$ est libre et étant de cardinal à égal à $r$, dimension de $V_x$, $\boxed{\text{c'est une base de } V_x.}$

**II.A.6)** Soit $i\in[\![1,p]\!]$. D'après II.A.5) il existe $(\alpha_{i,j})_{j\in\{1,\cdots,r\}}$ tel que $x_i=\sum_{j=1}^{r}\alpha_{i,j}f^{j-1}(x)$. Comme $F$ est stable par $f$, $F$ est de façon immédiate stable par $f^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Comme $x\in F$, on a donc $f^{j-1}(x)\in F$ pour tout $j\in\{1,\cdots,r\}$. Par suite, $\sum_{j=1}^{r}\alpha_{i,j}f^{j-1}(x)\in F$ et donc

$$\boxed{x_i\in F,\text{ ceci pour tout } i\in\{1,\cdots,p\}}$$

On a donc $x\in\bigoplus_{i=1}^{p}F\cap E_i$, ceci étant aussi immédiatement vrai pour $0_E$, on déduit que $F\subset\bigoplus_{i=1}^{p}F\cap E_i$ puis par double inclusion immédiate on a $\boxed{F=\bigoplus_{i=1}^{p}F\cap E_i}$

**II.B -)**

**II.B.1)** Soit $i\in\{1,\cdots,p\}$. Comme $p=n$ et que $(\lambda_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ sont deux à deux distincts, $\lambda_i$ est une valeur propre d'ordre de multiplicité un. Par suite, $\boxed{\dim(E_i)=1.}$

**II.B.2)** D'après II.B.1), pour tout $i\in\{1,\cdots,n\}$, $E_i$ est engendré par un vecteur propre et donc d'après I.A $E_i$ est stable par $f$. De plus, si $D$ est une droite vectorielle stable par $f$, elle est engendrée par un vecteur propre d'après encore I.A et est donc l'un des sous-espaces propres $E_i$ puisque pour tout $i\in\{1,\cdots,n\}$, $\dim(E_i)=\dim(D)=1$. Par conséquent, $E_1,E_2,\cdots,E_n$ sont les seules droite vectorielles stables par $f$. $\boxed{\text{Il y en a donc } n.}$

**II.B.3)** Montrons que $F$ est stable par $f$ et $\dim(F)=k$ si et seulement si il existe $H\subset\{1,\cdots,n\}$ avec $\mathrm{Card}\,(H)=k$ tel que $F=\bigoplus_{i\in H}E_i$.

Soit $H\subset\{1,\cdots,n\}$ avec $\mathrm{Card}\,(H)=k$. Soit, pour tout $i\in\{1,\cdots,n\}$, un vecteur propre $u_i\in E$ tel que $E_i=\mathrm{Vect}\,(u_i)$. On a donc $\bigoplus_{i\in H}E_i=\mathrm{Vect}\,((u_i)_{i\in H})$. D'après I.C-1), $\mathrm{Vect}\,((u_i)_{i\in H})$ est stable par $f$ donc $\bigoplus_{i\in H}E_i$ l'est aussi.

Soit $F$ un sous-espace de dimension $k$ et stable par $f$. D'après II.A.6), $F=F\subset\bigoplus_{i=1}^{p}F\cap E_i$.. Soit $i\in\{1,\cdots,n\}$. Comme $\dim(E_i)=1$, on a ou bien $F\cap E_i=E_i$ ou bien $F\cap E_i=\{0_E\}$. Soit $H=\{i\in[\![1,n]\!]\,;\,F\cap E_i=E_i\}$. On a donc $F=\bigoplus_{i\in H}E_i$. De plus, $\dim(F)=\dim(\bigoplus_{i\in H}E_i)=\sum_{i\in H}\dim(E_i)=\mathrm{Card}\,(H)$, donc $\mathrm{Card}\,(H)=k$. $F$ est donc stable par $f$ et $\dim(F)=k$ si et seulement si il existe $H\subset\{1,\cdots,n\}$ avec $\mathrm{Card}\,(H)=k$ tel que $F=\bigoplus_{i\in H}E_i$.

On déduit que le nombre de sous-espaces stables par $f$ et de dimension $k$ est le nombre de $k$-combinaisons de $\{1,\ldots,n\}$ c'est-à-dire, $\boxed{\binom{n}{k}.}$

**II.B.4)** Si $n=2$, d'après II.B.2), $\boxed{\text{Les sous-espaces stables sont } \{0_E\},\ E,\ E_1 \text{ et } E_2.}$

Si $n\geqslant 3$, d'après II.B.2) et II.B.3), il y a $1+\binom{n}{1}+\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n}{k}+1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\boxed{2^n}$, cette formule étant d'ailleurs valable pour $n=2$ et $n=1$.

$$\boxed{\text{Les sous-espaces stables de } f \text{ sont } \{0_E\},\ E_i,\ i \in [\![1,n]\!] \text{ et } \bigoplus_{i\in H} E_i, \text{ avec } H \subset \{1,\cdots,n\}\ 2 \leqslant \operatorname{Card}(H) \leqslant n-1.}$$