Devoir de Mathématiques numéro 4

Exercice 1

On désigne par id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$, et I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $A^2 - 4A$. En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.

2) La matrice A est-elle inversible ?

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixée. Effectuer la division euclidienne de X^n par P. Exprimer le fait que $x = 2$ est racine double de P. En déduire une expression du reste de la division euclidienne.

4) En déduire une expression de A^n en fonction de A, I et $n \in \mathbb{N}$.

5) Vérifier que la formule trouvée ci-dessus reste valable pour $n = -1$. En déduire la formule pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

Partie 1

Soit $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f et g commutent.

2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espace propre de f et g.
Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? trigonalisables ?

3) On note e_1 un vecteur propre de g associé à la valeur propre 2. Déterminer un vecteur e_2 non colinéaire à e_1 tel que le sous-espace $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$ soit stable par f et par g.

4) Construire une base $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ de trigonalisation commune à f et g.
On ne demande pas les valeurs de tous les coefficients des matrices de f et g dans cette base.

Partie 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$. , et soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1) Montrer que f est diagonalisable.

2) Soit $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$. On considère le polynôme P défini par

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$$

Soit u l'endomorphisme de E défini par

$$u = P(f) = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i$$

avec $f^0 = \mathrm{id}_E$ l'application identité de E, et pour $k \geqslant 1$, $f^k = f \circ \cdots \circ f$ est la k-ième composée de f.

a) Montrer que f et u commutent.

b) Exprimer les valeurs propres de u en fonction de celles de f et montrer que u est diagonalisable dans la même base que f.

3) Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f.

a) Quelle est la dimension de E_{λ_i}, sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i ?

b) En déduire que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, si e_i est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ_i, e_i est également un vecteur propre de g. On notera μ_i la valeur propre associée.

c) Les μ_i sont-ils forcément 2 à 2 distincts ?

d) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

e) Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.
Indication : *Utiliser le polynôme interpolateur de Lagrange P qui vérifie $P(\lambda_i) = \mu_i$ pour tout i.*

Exercice 3 (oral)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.
Indication : *On pourra regarder les racines de P. Si 0 et 1 sont les seules racines, comment s'écrit le polynôme P ?*

Exercice 4 (Centrale)

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul.
Si f est un endomorphisme de E, pour tout sous-espace F de E stable par f on note f_F l'endomorphisme de F induit par f, c'est-à-dire défini sur F par $f_F(x) = f(x)$ pour tout x dans F.
Pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E on définit la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des puissances de f par

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{id}_E, \\ f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f \quad \text{pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré au plus égal à n.
Pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices carrées à n lignes et à éléments dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices colonnes à n lignes et à éléments dans $\mathbb{K}$.

Partie 1

Dans cette partie, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

I.A – Montrer qu'une droite F engendrée par un vecteur u est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f.

I.B –

I.B.1) Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces de E stables par f et donner un exemple d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que deux sous-espaces stables.

I.B.2) Montrer que si E est de dimension finie $n \geqslant 2$ et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f et au moins quatre lorsque n est impair.
Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que trois sous-espaces stables.

I.C –

I.C.1) Montrer que tout sous-espace engendré par une famille de vecteurs propres de f est stable par f. Préciser l'endomorphisme induit par f sur tout sous-espace propre de f.

I.C.2) Montrer que si f admet un sous-espace propre de dimension au moins égale à 2 alors il existe une infinité de droites de E stables par f.

I.C.3) Que dire de f si tous les sous-espaces de E sont stables par f ?

I.D – Dans cette sous-partie, E est un espace de dimension finie.

I.D.1) Montrer que si f est diagonalisable alors tout sous-espace de E admet un supplémentaire dans E stable par f. On pourra partir d'une base de F et d'une base de E constituée de vecteurs propres de f.

I.D.2) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire dans E stable par f, alors f est diagonalisable. Qu'en est-il si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Partie 2

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, qui admet p valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et, pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, on note E_i le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i.

II.A – Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si $F = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i)$.

II.A.1) Montrer que tout sous-espace F de E tel que $F = \oplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i)$ est stable par f.

II.A.2) Soit F un sous-espace de E stable par f et x un vecteur non nul de F. Justifier l'existence et l'unicité de $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ dans $E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i$.

II.A.3) Si on pose $H_x = \{i \in [\![1, p]\!] \mid x_i \neq 0\}$, H_x est non vide et, quitte à renuméroter les valeurs propres (et les sous-espaces propres), on peut supposer que $H_x = [\![1, r]\!]$ avec $1 \leqslant r \leqslant p$. Ainsi on a $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} x_i$ avec $x_i \in E_i \setminus \{0\}$ pour tout i de $[\![1, r]\!]$.
On pose $V_x = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_r)$.
Montrer que $\mathcal{B}_x = (x_1, \dots, x_r)$ est une base de V_x.

II.A.4) Montrer que pour tout j de $[\![1, r]\!]$, $f^{j-1}(x)$ appartient à V_x et donner la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ dans la base $\mathcal{B}_x$.

II.A.5) Montrer que $(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ est une base de V_x.

II.A.6) En déduire que pour tout i de $[\![1, r]\!]$, x_i appartient à F et conclure.

II.B – Dans cette sous-partie, on se place dans le cas où $p = n$.

II.B.1) Préciser la dimension de E_i pour tout i dans $[\![1, p]\!]$.

II.B.2) Combien y a-t-il de droites de E stables par f ?

II.B.3) Si $n \geqslant 3$ et $k \in [\![2, n-1]\!]$, combien y a-t-il de sous-espaces de E de dimension k et stables par f ?

II.B.4) Combien y a-t-il de sous-espaces de E stables par f dans ce cas ? Les donner tous.