

Devoir de Mathématiques numéro 4

Correction

Exercice 1 (CCP MP 2010)

- 1) Soit p la projection orthogonale sur H . Par construction, $q = \text{id}_E - p$ est la projection orthogonale sur $H^\perp = \text{Vect}(u)$. Donc, d'après le théorème de la distance à un sous-espace vectoriel,

$$d(x, H) = \|x - p(x)\| = \|q(x)\|$$

Or, comme $e_1 = \frac{u}{\|u\|}$ est une base orthonormée de $\text{Vect}(u)$,

$$q(x) = (x|e_1)e_1 = \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u$$

Finalement,

$$d(x, H) = \left\| \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u \right\| = \frac{|(x|u)|}{\|u\|}$$

Un calcul d'homogénéité permet de contrôler un peu : $(x|u)$ est homogène à une distance au carré, et $\|u\|$ à une distance, donc on trouve une distance.

- 2) a) D'après le cours, Tr est une forme linéaire non nulle. Donc son noyau $H = \text{Ker Tr}$ est un hyperplan

Déterminer H^\perp est une question a priori un peu délicate : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est vaste. Mais il ne faut pas perdre de vue qu'on cherche un sous-espace vectoriel de dimension 1 : donc trouver un vecteur (i.e. une matrice) non nul suffira.

On remarque que,

$$\forall M \in H = \text{Ker Tr}, \quad (I_n|M) = \text{Tr}({}^t I_n M) = \text{Tr} M = 0$$

Donc $I_n \in H^\perp$, puis $\text{Vect } I_n \subset H^\perp$.

De plus, comme H est un hyperplan, $\dim H^\perp = \dim E - \dim H = 1$.

Ainsi, par inclusion et égalité des dimensions, $H^\perp = \text{Vect } I_n$

- b) D'après 3)b), $H = H^{\perp\perp} = (\text{Vect } I_n)^\perp$, donc d'après 3)a), avec $u = I_n$,

$$d(M, H) = \frac{|(M|u)|}{\|u\|} = \frac{|(M|I_n)|}{\|I_n\|} = \frac{|(M|u)|}{\|u\|}$$

Or $(M|I_n) = \text{Tr}(M)$ et $\|I_n\| = \sqrt{\text{Tr}({}^t I_n I_n)} = \sqrt{n}$, d'où

$$d(M, H) = \frac{|\text{Tr } M|}{\sqrt{n}}$$

Exercice 2 (E3A PC 2014)

- 1) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad A_\theta^k = A_{k\theta}$$

est vraie pour tout $k \geq 0$.

- \mathcal{H}_0 : est vraie par hypothèse.
- $\mathcal{H}_k \implies \mathcal{H}_{k+1}$: Supposons \mathcal{H}_k vraie. Ainsi,

$$\begin{aligned} A_\theta^{k+1} &= A_{k\theta} A_\theta = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta & -\cos k\theta \sin \theta - \sin k\theta \cos \theta \\ \sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta & -\sin k\theta \sin \theta + \cos k\theta \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'après les formules de trigonométrie. Donc \mathcal{H}_{k+1} est vraie.

- **Conclusion** : $\forall k \geq 0 \quad A_\theta^k = A_{k\theta}$

Géométriquement, A_θ est la matrice d'une rotation d'angle θ (et de centre O) dans \mathbb{R}^2 . Donc A_θ^k est la composée de k fois la rotation d'angle θ .

Ainsi, ce résultat signifie que $\boxed{\text{Composer } k \text{ fois la rotation d'angle } \theta \text{ donne la rotation d'angle } k\theta}$

2) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad ({}^t B)^k = {}^t(B^k)$$

est vraie pour tout $k \geq 0$.

- \mathcal{H}_0 : est vraie car $I_n = {}^t I_n$.
- $\mathcal{H}_k \implies \mathcal{H}_{k+1}$: Supposons \mathcal{H}_k vraie : $({}^t B)^k = {}^t(B^k)$. De plus ${}^t B {}^t A = {}^t(AB)$.

Par conséquent $({}^t B)^{k+1} = {}^t B ({}^t B)^k = {}^t B {}^t(B^k) = {}^t(B^{k+1})$. Donc \mathcal{H}_{k+1} est vraie.

- **Conclusion** : $\forall k \geq 0 \quad ({}^t B)^k = {}^t(B^k)$

3) $A_\theta \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ (${}^t A_\theta A_\theta = I_2$) donc $A_\theta^{-1} = {}^t A_\theta$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente,

$$A_\theta^{-k} = (A_\theta^{-1})^k = ({}^t A_\theta)^k = {}^t(A_\theta)^k$$

Or d'après 1), $A_\theta^k = A_{k\theta}$, et comme cosinus est paire et sinus impaire ${}^t A_{k\theta} = A_{-k\theta}$. D'où $A_\theta^{-k} = A_{-k\theta}$.

Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{Z}, A_\theta^k = A_{k\theta}}$

4) Cherchons $M = A_\theta$ telle que $M^p = A_{p\theta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_{\pi/2}$.

Choisissons par exemple $\theta = \frac{\pi}{2p}$ et donc

$$M = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2p}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2p}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2p}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2p}\right) \end{pmatrix}$$

D'après 1), $M^p = A_\theta^p = A_{p\theta} = A_{\pi/2}$ donc convient.

Exercice 3 (D'après EDHEC 2013 S)

1) \mathcal{B} est une base orthonormée, donc

$$\boxed{\langle x, y \rangle = {}^t XY}$$

2) a) Dans la base orthonormée \mathcal{B} ,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = {}^t (AX)Y = {}^t X {}^t AY = {}^t X ({}^t AY) = \langle x, f^*(y) \rangle$$

b) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall(x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$. Montrons que $g = f^*$.

$$\forall(x, y) \in E^2 \langle x, g(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$$

Donc

$$\forall(x, y) \in E^2 \langle x, (g - f^*)(y) \rangle = \langle x, g(y) \rangle - \langle x, f^*(y) \rangle = 0$$

Ainsi, $\forall y \in E, (g - f^*)(y) \in E^\perp = \{0\} : (g - f^*)(y) = 0$.

Donc $g - f^* = 0$, c'est-à-dire $g = f^*$.

Conclusion : f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall(x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$

3) \implies Supposons f symétrique. Par définition, $\forall(x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

Donc, par unicité de l'adjoint (question 2)b), $f^* = f$.

\impliedby Supposons que $f^* = f$. Alors, d'après 2)a), $\forall(x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

Donc f est symétrique.

Conclusion : f est symétrique si et seulement si $f^* = f$

4) a) Soit $x \in \text{Im } p^*$, soit $x' \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = p^*(x')$. D'après 2)a),

$$\forall y \in \text{Ker } p \quad \langle x, y \rangle = \langle p^*(x'), y \rangle = \langle x', p(y) \rangle = \langle x', 0 \rangle = 0$$

D'où $x \in (\text{Ker } p)^\perp$.

Conclusion : $\text{Im } p^* \subset (\text{Ker } p)^\perp$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Comme p est un projecteur $x - p(x) \in \text{Ker } p$ et donc, par définition de $y \in (\text{Ker } p)^\perp$,

$$\langle x - p(x), y \rangle = 0$$

L'égalité précédente s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad 0 = \langle x - p(x), y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle p(x), y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, p^*(y) \rangle = \langle x, y - p^*(y) \rangle$$

D'où $y - p^*(y) \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$ donc $y = p^*(y)$

Par conséquent, $y \in \text{Im } p^*$.

Ainsi nous venons de montrer $y \in (\text{Ker } p)^\perp \implies y \in \text{Im } p^*$, i.e.

$$(\text{Ker } p)^\perp \subset \text{Im } p^*$$

En combinant a) et b) nous avons donc montré $(\text{Ker } p)^\perp = \text{Im } p^*$.

c) Supposons que $p = p^*$. Alors le résultat de la question précédente s'écrit $(\text{Ker } p)^\perp = \text{Im } p$ et p est un projecteur orthogonal.

Donc $p = p^* \implies p$ est un projecteur orthogonal

5) Montrons que $(\text{Im } f)^\perp \subset \text{Ker } f^*$:

$$\begin{aligned} x \in (\text{Im } f)^\perp &\implies \forall y \in \text{Im } f \langle x, y \rangle = 0 \\ &\implies \forall x' \in E \langle x, f(x') \rangle = 0 \\ &\implies \forall x' \in E \langle f^*(x), x' \rangle = 0 \\ &\implies f^*(x) \in E^\perp = \{0\} \\ &\implies x \in \text{Ker } f^* \end{aligned}$$

Donc $(\text{Im } f)^\perp \subset \text{Ker } f^*$.

Réciproquement, montrons que $\text{Ker } f^* \subset (\text{Im } f)^\perp$:

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } f^* &\implies f^*(x) = 0 \\ &\implies \forall x' \in E \langle f^*(x), x' \rangle = 0 \\ &\implies \begin{cases} \forall y \in \text{Im } f, \exists x' \in E, y = f(x') \\ \text{et } \langle x, y \rangle = \langle x, f(x') \rangle = \langle f^*(x), x' \rangle = \langle 0, x' \rangle = 0 \end{cases} \\ &\implies x \in (\text{Im } f)^\perp \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } f^* \subset (\text{Im } f)^\perp$. Conclusion :

$$\boxed{\text{Ker } f^* = (\text{Im } f)^\perp}$$

D'après le théorème du rang, $\text{rg } f^* = \dim E - \dim \text{Ker } f^*$.

De plus, comme $E = F \oplus F^\perp$, $\text{rg } f = \dim \text{Im } f = \dim E - \dim(\text{Im } f)^\perp$. Ainsi

$$\boxed{\text{rg } f = \text{rg } f^*}$$

6) a) Le déterminant est invariant par transposition, donc

$$\chi_{f^*}(x) = \det(xI_n - {}^t A) = \det({}^t(xI_n - {}^t A)) = \det(xI_n - A) = \chi_f(x)$$

Ainsi, f et f^* ont les mêmes valeurs propres, donc en particulier λ est valeur propre de f^*

b) Le vecteur u est non nul car c'est un vecteur propre. Ainsi $\dim \text{Vect } u = 1$ puis, comme $F \oplus F^\perp = E$, $\dim(\text{Vect } u)^\perp = \dim E - 1$:

$$\boxed{(\text{Vect } u)^\perp \text{ est un hyperplan}}$$

$$\begin{aligned} x \in (\text{Vect } u)^\perp &\implies \langle f(x), u \rangle = \langle x, f^*(u) \rangle = \langle x, \lambda u \rangle = \lambda \langle x, u \rangle = 0 \\ &\implies f(x) \in (\text{Vect } u)^\perp \end{aligned}$$

Donc $f((\text{Vect } u)^\perp) \subset (\text{Vect } u)^\perp$:

$$\boxed{(\text{Vect } u)^\perp \text{ est stable par } f.}$$