Devoir de Mathématiques numéro 4

Exercice 1

Soit E euclidien.

1) Cas des hyperplans : soit u un vecteur non nul de E et H l'hyperplan $(\text{Vect}\{u\})^{\perp}$. Exprimer pour $x \in E$, la distance $\text{d}(x, H)$ en fonction de $< x, u >$ et de $\|u\|$.

2) Désormais $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $\langle A, B \rangle = \text{Tr}\,(A^T B)$.
On note H l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

- **a)** Justifier que H est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $H^{\perp}$.
- **b)** Si M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer la distance $\text{d}(M, H)$.

Exercice 2

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

1) Montrer par un calcul que l'on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $A_\theta^k = A_{k\theta}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

2) Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $({}^tB)^k = {}^t(B^k)$.

3) En déduire que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $A_\theta^k = A_{k\theta}$.

4) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^p = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Si $f \in \mathscr{L}(E)$ a pour matrice A dans la base $\mathscr{B}$, on note f^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est ${}^tA$. Cet endomorphisme s'appelle l'adjoint de f.
Le produit scalaire est noté $< ., . >$, et la norme $\|.\|$.

1) Soit X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y de E dans la base $\mathscr{B}$. Rappeler l'expression de $< x, y >$ à l'aide de X et Y.

2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ fixé, de matrice A dans $\mathscr{B}$.

- **a)** Vérifier que l'on a $\forall (x, y) \in E^2, < f(x), y >=< x, f^*(y) >$.
- **b)** Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall (x, y) \in E^2, < f(x), y >=< x, f^*(y) >$.

3) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que f est symétrique si et seulement si $f^* = f$.

4) Soit p un projecteur.

- **a)** Montrer que $\text{Im}\ p^* \subset (\text{Ker}\ p)^{\perp}$.
- **b)** Soit $y \in (\text{Ker}\ p)^{\perp}$. Montrer que, pour tout $x \in E$, $< x - p(x), y >= 0$.
  En déduire que $y = p^*(y)$ puis que $(\text{Ker}\ p)^{\perp} \subset \text{Im}\ p^*$.
- **c)** Montrer que si p est symétrique, alors p est un projecteur orthogonal.

5) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\text{Ker}\ f^* = (\text{Im}\ f)^{\perp}$. En déduire que f et f^* ont même rang.

6) On suppose désormais que $f \in \mathscr{L}(E)$ possède au moins une valeur propre λ réelle, et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan E stable par f.

- **a)** Montrer que λ est valeur propre de f^*.
- **b)** On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ. Montrer que $(\text{Vect}\ u)^{\perp}$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f.