Lycée St Joseph
Classe de PC

Pour le jeudi 14 décembre 2023

Devoir de Mathématiques numéro 3

Correction

Exercice 1 (CCINP PC 2023)

Partie I - Étude d'un premier exemple

Q1. Dans cette partie, $n = 2$. Montrons que $(v, f(v))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

$$f(v) = (4, 1)$$

Or $(4, 1)$ n'est pas colinéaire à $v = (1, 0)$, donc $(v, f(v))$ est une famille libre de 2 éléments dans un espace de dimension 2.
Donc $(v, f(v))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, comme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$,

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme cyclique de } \mathbb{R}^2}$$

Q2. La matrice de f dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit vous passez par la méthode habituelle :

$$f(e_1) = f((1,0)) = (4,1) = 4e_1 + e_2$$

Soit vous écrivez directement

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x - 2y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\chi_f(x) &= \det(xI_2 - A) \\
&= \begin{vmatrix} x-4 & 2 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} \qquad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\
&= \begin{vmatrix} x-4 & 2 \\ -x+3 & x-3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x-3)\begin{vmatrix} x-4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-3)(x-4+2)
\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est $\boxed{\chi_f(x) = (x-3)(x-2)}$, donc

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } f \text{ sont } \lambda = 3 \text{ et } \lambda = 2 \text{ de multiplicité 1.}}$$

On vérifie ses calculs avec la trace : $\mathrm{Tr}\, A = 4 + 1 = 5 = 2 + 3$.

- Sous-espaces propres :

- $\underline{E_3 = \operatorname{Ker}(3I_2 - A)}$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_3 \iff \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X = 0 \iff -x + 2y = 0 \iff x = 2y$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff X \in \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{E_3 = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Une base du sous-espace propre E_3 associé à la valeur propre 3 est $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\underline{E_2 = \operatorname{Ker}(2I_2 - A)}$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff X \in \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{E_2 = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Une base du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Q3. *$(w, f(w))$ n'est pas une base si les deux vecteurs sont colinéaires. Si $w \neq 0$, c'est équivalent à « w vecteur propre de f ».*

Soit $w = (1, 1) \neq 0$. Alors $f(w) = 2w$, donc $(w, f(w))$ est liée, donc n'est pas une base :

$$\boxed{\text{Il existe un vecteur } w \in \mathbb{R}^2 \text{ non nul tel que la famille } (w, f(w)) \text{ ne soit pas une base de } \mathbb{R}^2}$$

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Q4. Montrons ce résultat matriciellement :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = M + 2I_3$$

Donc

$$\boxed{g^2 = g + 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}}$$

Q5. Pour les 5/2 : M est symétrique réelle, donc diagonalisable (dans une base orthonormée).

Pour les 3/2 et les 5/2 : $P = X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$ est un polynôme annulateur de g, scindé à racines simples. Donc, par théorème de diagonalisation,

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$$

De plus, $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-1, 2\}$.
S'il n'y a qu'une valeur propre λ (-1 ou 2), comme M est diagonalisable, elle est semblable à λI_3 :

$$\exists P \in GL_3(\mathbb{R}), \qquad M = P\lambda I_3 P^{-1} = \lambda P P^{-1} = \lambda I_3$$

Or $M \neq \lambda I_3$, donc elle a deux valeurs propres :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 2\}}$$

Pour la factorisation de $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, cherchez les racines évidentes.
Quand le polynôme est unitaire à coefficients entiers, les racines rationnelles sont à chercher dans les diviseurs du terme constant a_0 (ici, $a_0 = -2$).
Donc, ici, parmi $1, -1, 2, -2$. Sachant qu'il y a deux racines, et que leur produit est égal à -2.

Q6. *Vu la formulation de la question, et sa position en 2e exemple, il se peut qu'il ne soit pas cyclique.*
D'après la question 4, $g^2 = g + 2\,\mathrm{id}$. Donc, pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, $g^2(v) - g(v) - 2v = 0$: la famille $(v, g(v), g^2(v))$ est liée.
Ainsi,

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } g \text{ n'est pas cyclique}}$$

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Q7.
- Montrons que Δ est linéaire : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in E = \mathbb{R}_n[X]$:

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X) \\ &= \lambda \Delta(P) + \Delta(Q)\end{aligned}$$

  Donc Δ est linéaire.
- Montrons que $\Delta : E \to E$: *Vous êtes dans $\mathbb{R}_n[X]$: vous devez impérativement parler de degré.*
  Soit $P \in E$. Comme $\deg P(X+1) = \deg P \leqslant n$, il vient

$$\deg(\Delta(P)) \leqslant \max(\deg P(X+1), \deg P) \leqslant n$$

  Donc $\Delta(P) \in E$.

Conclusion,

$$\boxed{\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])}$$

Q8. À l'aide de la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}\Delta\left(X^k\right) &= (X+1)^k - X^k \\ &= \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i 1^{k-i}\right) - X^k \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\Delta\left(X^k\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i}$$

En particulier, si $k = 0$, $\Delta(1) = 0$.

Q9. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non constant, et $d = \deg P \geqslant 1$. Ainsi,

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \quad \text{avec} \quad a_d \neq 0$$

D'après ci-dessus, et en remarquant que $\Delta(X^0) = 0$,

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= \sum_{k=0}^{d} a_k \Delta(X^k) \\ &= \sum_{k=1}^{d} a_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \end{aligned}$$

Le terme de plus haut degré de cette somme est $a_d \begin{pmatrix} d \\ d-1 \end{pmatrix} X^{d-1}$, avec $a_d d \neq 0$ ($k = d$, $i = k-1 = d-1$).
Donc $\deg(P) = d - 1 = \deg(P) - 1$. Conclusion :

$$\boxed{\text{Si } P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ est un polynôme non constant, alors } \deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1}$$

Q10. Soit P un polynôme de degré n, par exemple $P = X^n$.
Alors, par récurrence sur k, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\deg(P) = \deg(P) - k$.
Donc la famille $(P, \Delta(P), \dots, \Delta^n(P))$ est de degrés échelonnés, donc libre.
Or $\dim E = n + 1$, et il y a $n + 1$ éléments dans cette famille, donc c'est une base de E.
Conclusion :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \Delta \text{ est cyclique}}$$

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Q11. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comme v_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i, $h(v_i) = \lambda_i v_i$, et par récurrence (à rédiger, de préférence) sur $p \in \mathbb{N}^*$,

$$h^p(v_i) = \lambda_i^p v_i$$

Ainsi, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} h^p(v) &= h^p\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h^p(v_i) && \text{Par linéarité de } h^p \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^p v_i && \text{D'après ci-dessus} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n}$$

Q12. D'après la question 11, la matrice colonne des coordonnées de $h^p(v_i)$ dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda_1^p \\ \vdots \\ \alpha_n \lambda_n^p \end{pmatrix}$.

Donc la matrice de la famille $\mathscr{F}$ est $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \cdots & \alpha_1 \lambda_1^n \\ \alpha_2 & \alpha_2 \lambda_2 & \cdots & \alpha_2 \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n \lambda_n & \cdots & \alpha_n \lambda_n^n \end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$\det \mathscr{F} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\lambda_1 & \cdots & \alpha_1\lambda_1^n \\ \alpha_2 & \alpha_2\lambda_2 & \cdots & \alpha_2\lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n\lambda_n & \cdots & \alpha_n\lambda_n^n \end{vmatrix} \begin{matrix} \curvearrowright \alpha_1 \\ \curvearrowright \alpha_2 \\ \vdots \\ \curvearrowright \alpha_n \end{matrix}$$
$$= \alpha_1 \dots \alpha_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^n \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^n \end{vmatrix}$$

Or le déterminant de la matrice de Vandermonde ci-dessus est

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Ainsi,

$$\boxed{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \alpha_1 \dots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)}$$

Q13. La famille $\mathscr{F}$ est une base si et seulement si $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{F} \neq 0$.

Si h est cyclique, $\mathscr{F}$ est une base et il existe v tel que $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{F} \neq 0$. Donc, d'après le calcul ci-dessus, les λ_i sont 2 à 2 distincts.

Réciproquement, si les λ_i sont 2 à 2 distinct, en prenant $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$ (c'est-à-dire tous les α_i égaux à 1), $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{F} \neq 0$ d'après le calcul ci-dessus, donc on a trouvé v qui convient : h est cyclique.

Conclusion :

$$\boxed{h \text{ est cyclique si et seulement si il admet } n \text{ valeurs propres distinctes}}$$

Exercice 2 (EMLyon 2022)

1) a) Après calculs,

$$U^2 = I_4 \qquad \text{et} \qquad V^2 = I_4$$

Donc

$$\boxed{u \text{ et } v \text{ sont des symétries}}$$

De plus,

$$UV = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 & 3 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -VU$$

b) D'après la question 1)a), u est une symétrie : elle est donc diagonalisable, et a pour valeurs propres possibles 1 et -1. La matrice de u dans une base de vecteurs propres sera donc

$$U' = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{4-k} \end{array}\right)$$

Avec $k = \dim E_1(u)$ la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1, et $4 - k = \dim E_{-1}(u)$.

Comme la trace est invariante par changement de base,

$$\text{Tr } u = \text{Tr } U = 0 = k - (4 - k) = 4 - 2k$$

Ainsi, $k = 2$. En conclusion

$$\boxed{\text{Tr } u = 0 \text{ et } \dim E_1(u) = \dim E_{-1}(u) = 2}$$

De même, v est une symétrie, on trouve Tr $V = 0$, donc de même

$$\boxed{\text{Tr } v = 0 \text{ et } \dim E_1(v) = \dim E_{-1}(v) = 2}$$

c) • Base de $E_1(u) = \text{Ker}\,(I_4 - U)$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_1(u) \iff \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} X = 0$$

$$\iff \begin{cases} 4x + 6z = 0 \\ 2x + 2z - 2t = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_1 \longleftarrow 1/2L_1 \\ L_2 \longleftarrow L_2 - L_1' \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ -z - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3t \\ z = -2t \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ y \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff X \in \text{Vect}\,(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Une base de } E_1(u) \text{ est } (e_1, e_2) = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})}$$

• Base de $E_{-1}(u)$: D'après le calcul effectué à la question 1)b), $\dim E_{-1}(u) = 2$.
Il suffit donc de trouver une famille libre de deux vecteurs propres de u pour la valeur propre -1 pour que ce soit une base de $E_{-1}(u)$. Or, d'après la question 1)a), $u \circ v = -v \circ u$:

$$\begin{aligned} u(e_3) &= u \circ v(e_1) \\ &= -v \circ u(e_1) && \text{d'après 1)a)} \\ &= -v(e_1) && \text{car } e_1 \in E_1(u) : u(e_1) = e_1 \\ &= e_3 && \text{par définition de } e_3 \end{aligned}$$

Donc $e_3 \in E_{-1}(u)$. Par un calcul rigoureusement identique, $e_4 \in E_{-1}(u)$.
Il reste à montrer que (e_3, e_4) est libre : comme v est une symétrie, v est bijective, donc injective, donc l'image d'une famille libre par v est libre.
Or (e_1, e_2) est une base de $E_1(u)$, donc libre dans E. Ainsi $(e_3, e_4) = (v(e_1), v(e_2))$ est libre.
Conclusion : (e_3, e_4) est une famille de $E_{-1}(u)$, libre, avec $\dim E_{-1}(u) = 2$:

$$\boxed{\text{Une base de } E_{-1}(u) \text{ est } (e_3, e_4) = (v(e_1), v(e_2))}$$

- Diagonalisation de u et v : Par théorème de diagonalisation,

$$E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$$

Donc, par concaténation des bases de $E_1(u)$ et $E_{-1}(u)$, on obtient une base de E :

$$\boxed{\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ est une base de } E}$$

De plus,

$$\begin{aligned} u(e_1) &= e_1 & \text{car } e_1 \in E_1(u) \\ u(e_2) &= e_2 & \text{car } e_2 \in E_1(u) \\ u(e_3) &= -e_3 & \text{car } e_3 \in E_{-1}(u) \\ u(e_4) &= -e_4 & \text{car } e_4 \in E_{-1}(u) \end{aligned} \qquad \text{Donc } \operatorname{Mat}(u, \mathscr{E}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) & u(e_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

Pour v, il vient

En conclusion,

$$\begin{aligned} v(e_1) &= e_3 & \text{par construction} \\ v(e_2) &= e_4 & \text{idem} \\ v(e_3) &= v^2(e_1) = e_1 & \text{car } v \text{ symétrie} \\ v(e_4) &= v^2(e_2) = e_2 & \text{idem} \end{aligned} \qquad \text{Donc } \operatorname{Mat}(u, \mathscr{E}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) & u(e_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

$$\boxed{\operatorname{Mat}(u, \mathscr{E}) = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \operatorname{Mat}(v, \mathscr{E}) = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}}$$

2) Par hypothèse,

$$\begin{aligned} u \circ v + v \circ u = 0 &\Longrightarrow \operatorname{Tr}(u \circ v + v \circ u) = \operatorname{Tr}(u \circ v) + \operatorname{Tr}(v \circ u) = 0 \\ &\Longrightarrow 2 \operatorname{Tr}(u \circ v) = 0 & \text{car } \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA) \end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{\operatorname{Tr}(u \circ v) = 0}$$

3) Par hypothèse,

$$\begin{aligned} u \circ v + v \circ u = 0 &\Longrightarrow uv^2 + vuv = 0v = 0 \\ &\Longrightarrow u + vuv = 0 & \text{car } v^2 = \mathrm{id} \\ &\Longrightarrow \operatorname{Tr}(u) = -\operatorname{Tr}(v(uv)) = -\operatorname{Tr}(uv^2) = -\operatorname{Tr}(u) & \text{car } \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA) \\ &\Longrightarrow \operatorname{Tr}(u) = 0 \end{aligned}$$

Par symétrie des roles joués par u et v, il vient aussi $\operatorname{Tr}(v) = 0$.

$$\boxed{\operatorname{Tr} u = \operatorname{Tr} v = 0}$$

4) L'endomorphisme u est une symétrie ($u^2 = \mathrm{id}$), donc diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$:

$$\boxed{E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)}$$

Soit $x \in E$. Posons $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(x + u(x)) \\ x_{-1} = \dfrac{1}{2}(x - u(x)) \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u(x_1) = \dfrac{1}{2}(u(x) + u^2(x)) = \dfrac{1}{2}(u(x) + x) = x_1 \\ u(x_{-1}) = \dfrac{1}{2}(u(x) - x) = -x_{-1} \end{cases}$

Donc $x_1 \in E_1(u)$ et $x_{-1} \in E_{-1}$. De plus, $x = x_1 + x_{-1}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{La décomposition de } x \in E \text{ dans } E_1(u) \oplus E_{-1}(u) \text{ est } x = \left[\frac{1}{2}(x + u(x))\right] + \left[\frac{1}{2}(x - u(x))\right]}$$

5) La trace d'un endomorphisme est la somme de ses valeurs propres (complexes) comptées avec multiplicité. De plus, u est diagonalisable, et $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$. Ainsi,

$$\mathrm{Tr}(u) = \dim E_1(u) - \dim E_{-1}(u)$$

Or $\mathrm{Tr}\, u = 0$ d'après 3, donc $\dim E_1(u) = \dim E_{-1}(u)$.
Comme $E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$, $\dim E = 2 \dim E_1(u)$ est paire :

$$\boxed{\text{La dimension de } E \text{ est paire}}$$

6) L'application linéaire v étant une symétrie, elle est bijective, donc $\dim v(E_1(u)) = \dim E_1(u)$. Or $\dim E_1(u) = \dim E_{-1}(u)$ d'après 5. Donc $\dim v(E_1(u)) = \dim E_{-1}(u)$
Montrons que $v(E_1(u)) \subset E_{-1}(u)$:

$$\begin{aligned} x \in E_1(u) \Longrightarrow u(v(x)) &= -v(u(x)) \quad \text{car } uv = -vu \text{ par hypothèse} \\ &= -v(x) \qquad\qquad\quad \text{car } x \in E_1(u) \\ \Longrightarrow v(x) &\in E_{-1}(u) \end{aligned}$$

Donc $v(E_1(u)) \subset E_{-1}(u)$.
Par inclusion et égalité des dimension,

$$\boxed{v(E_1(u)) = E_{-1}(u)}$$

En appliquant v à l'égalité ci-dessus, et en observant que $v^2 = \mathrm{id}$, il vient

$$\boxed{E_1(u) = v(E_{-1}(u))}$$

7) Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de $E_1(u)$. Comme v est un isomorphisme et que $v(E_1(u)) = E_{-1}(u)$ d'après 6, $(v(e_1), \ldots, v(e_k))$ est donc une base de $E_{-1}(u)$.
Notons $(e_{k+1}, \ldots, e_{2k}) = (v(e_1), \ldots, v(e_k))$.
Comme $E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$, par concaténation,

$$\boxed{\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{2k}) \text{ est une base de } E}$$

De plus, par construction et d'après 6,

- $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $u(e_i) = e_i$ car $e_i \in E_1(u)$,
- $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $u(e_{k+i}) = -e_{k+i}$ car $e_{k+i} \in E_{-1}(u)$.

Donc $\boxed{\mathrm{Mat}(u, \mathscr{C}) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_k \end{pmatrix}}$

Et, pour v,

- $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $v(e_i) = e_{k+i}$ par construction,
- $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $v(e_{k+i}) = v^2(e_i) = e_i$ car $v^2 = \mathrm{id}$.

Donc $\boxed{\mathrm{Mat}(v, \mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ I_k & 0 \end{pmatrix}}$