Devoir de Mathématiques numéro 3

Exercice 1 (Endomorphisme cyclique)

Présentation générale

Dans cet exercice, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique dont la définition est donnée ci-dessous. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f^0 = \mathrm{id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $\left(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)\right)$ soit une base de l'espace vectoriel E.

Cet exercice est composé de quatre parties indépendantes. Les trois premières sont consacrées à l'étude de différents exemples. Dans la dernière partie, on détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique.

Partie I - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (4x - 2y, x + y)$$

Q1. En considérant $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, montrer que f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.

Q2. Déterminer les valeurs propres de f et donner une base de chaque sous-espace propre de f.

Q3. Existe-t-il un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w, f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$?

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Q4. Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Q5. Montrer que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

Q6. L'endomorphisme g est-il cyclique ?

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

Par exemple, on a $\Delta\left(X^2\right) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$

Q7. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q8. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $\Delta\left(X^k\right)$ sous une forme développée.

Q9. En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

Q10. Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable h d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de h pour que cet endomorphisme soit cyclique.
Comme l'endomorphisme h est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de l'espace vectoriel E composée de vecteurs propres de h. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\lambda_k \in \mathbb{C}$ la valeur propre associée au vecteur propre v_k.
Soit $v \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Q11. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$$

Q12. Montrer que le déterminant de la famille $\mathcal{F} = \big(v, h(v), \dots, h^{n-1}(v)\big)$ dans la base $\mathcal{B}$ est égal à :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Q13. Conclure que h est cyclique si et seulement si il admet n valeurs propres distinctes.

Exercice 2 (Symétries anticommutant)

Dans tout ce problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. L'application identité de E est notée id. Si f est un endomorphisme de E, pour toute valeur propre λ de f on note $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id})$ le sous-espace propre de f relatif à λ.

1) Dans cette question seulement, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n = 4$. On le munit d'une base $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ et on considère les endomorphismes u et v représentés dans la base $\mathscr{B}$ par les matrices

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 3 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que u et v sont des symétries, et vérifier rapidement que $u \circ v = -v \circ u$.

b) Calculer $\mathrm{Tr}\ u$ et $\mathrm{Tr}\ v$; montrer que cela permet de déterminer la dimension des sous-espaces propres de u et v (sans avoir à déterminer ces derniers explicitement).

c) Déterminer une base (e_1, e_2) de $E_1(u)$. Montrer que la famille (e_3, e_4) définie par $e_3 = v(e_1)$ et $e_4 = v(e_2)$ est une base de $E_{-1}(u)$.
Si l'on pose $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, justifier que $\mathscr{E}$ est une base de E et déterminer la matrice représentative de u et de v dans la base $\mathscr{E}$.

On revient au cas général ; n est maintenant supposé quelconque. Soient u et v deux endomorphismes de E vérifiant

$$u^2 = v^2 = \mathrm{id} \qquad \text{et} \qquad u \circ v + v \circ u = 0.$$

2) Montrer que $\mathrm{Tr}\,(u \circ v) = 0$.

3) Montrer que $\mathrm{Tr}\ u = \mathrm{Tr}\ v = 0$.

4) Montrer que $E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$ et expliciter, pour tout vecteur $x \in E$, la décomposition de x dans cette somme directe.

5) Montrer que la dimension de E est paire. On notera $n = 2k$, avec k un entier naturel.

6) Montrer que $v(E_1(u)) = E_{-1}(u)$ et que $v(E_{-1}(u)) = E_1(u)$.

7) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{2k})$ de E dans laquelle les matrices de u et de v s'écrivent, par blocs :

$$\mathrm{Mat}\,(u, \mathscr{C}) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_k \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}\,(v, \mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ I_k & 0 \end{pmatrix}$$