Lycée St Joseph
Classe de PC

Pour le jeudi 15 décembre 2022

Devoir de Mathématiques numéro 3

Exercice 1

Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts, et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.
Déterminer $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 f(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(a_k)$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1) Montrer qu'il existe X et Y des vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$ tels que $M = X^tY$.

2) Déterminer $\operatorname{Tr} M$ en fonction de X et Y.

3) Calculer M^2 en fonction de M.

4) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$. , et soit f un endomorphisme de E.

1) On suppose que f est diagonalisable. Soit $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$, et $u = P(f)$.

- **a)** Montrer que f et u commutent.
- **b)** Exprimer les valeurs propres de u en fonction de celles de f et montrer que u est diagonalisable dans la même base que f.

2) Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f. On suppose désormais que f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

- **a)** L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
- **b)** Quelle est la dimension de E_{λ_i}, sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i ?
- **c)** En déduire que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, si e_i est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ_i, e_i est également un vecteur propre de g. On notera μ_i la valeur propre associée.
- **d)** Les μ_i sont-ils forcément 2 à 2 distincts ?
- **e)** L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?
- **f)** Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.
  Indication : *Utiliser le polynôme interpolateur de Lagrange P*