Devoir de Mathématiques numéro 3

Correction

Exercice 1

1) *Le seul problème potentiel est la convergence de la série $\sum u_n(x)$.*
On cherche donc l'ensemble où la série $\sum u_n$ converge simplement.
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

Si $x < 0$: Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$, donc la série $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.

Si $x = 0$: Dans ce cas $u_n(0) = \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

Si $x > 0$: *On peut aussi majorer par e^{-nx}, mais restons simple et systématique.*

$$n^2 u_n(x) = ne^{-nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par croissance comparée, car $x > 0$. Donc $u_n(x) = o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$). Donc par comparaison, $\sum u_n(x)$ converge.

Conclusion : l'ensemble de définition I de S est

$$\boxed{I =]0, +\infty[}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions u_n sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- Convergence normale de $\sum u_n'$: Montrons que $\sum u_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

  Pour tout $x \in [a, +\infty[$,
  - $u_n'(x) = -e^{-nx}$
  - $u_n''(x) = ne^{-nx} > 0$

  D'où le tableau ci-contre.
  Ainsi, $\|u_n'\|_\infty = |u_n'(a)| = e^{-na}$.

x	a		$+\infty$
$u_n''(x)$		$+$	
u_n'	$-e^{-na}$	$\nearrow$	0

  Ainsi, $\|u_n'\|_\infty = q^n$ avec $q = e^{-a} \in]-1, 1[$, on reconnaît une série géométrique convergente :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n' \text{ converge normalement sur } [a, +\infty[.}$$

  Il n'y a pas convergence normale sur $]0, +\infty[$:
  sur cet intervalle, on trouve $\|u_n'\|_\infty = 1$, et $\sum \|u_n'\|_\infty$ diverge.

- Montrons que S est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$: Appliquons le théorème de dérivation terme à terme.
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$;

- $\sum u_n$ converge simplement vers S sur $[a,+\infty[$ d'après 1 ;
- $\sum u_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$;

Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme, S est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, et

$$\forall x \in [a,+\infty[, \qquad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$$

- Conclusion : Pour tout $a>0$, S est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, donc

$$\boxed{\text{La fonction } S \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \bigcup_{a>0} [a,+\infty[= \mathbb{R}_+^*}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum u_n'(x)$ est une série géométrique convergente, donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} -e^{-(n+1)x}\\ &= -e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-x}\right)^n\\ &= -\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\\ &= -\frac{1}{e^x-1}\end{aligned}$$

et d'après ci-dessus $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$ donc

$$\boxed{S'(x) = -\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}}$$

3) Par définition d'une primitive, S est une primitive de S'

Or $S' = -\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1-e^{-x}$. *(Posez u = ..., vérifiez vos primitives.)*

Donc $S(x) = -\ln(1-e^{-x}) + K$ pour tout $x>0$ (on vérifie que $1-e^{-x}>0$).

Limite en $+\infty$: *Ce calcul est un peu délicat.*

Pour tout $x>0$, $S(x) \geqslant 0$ comme limite de sommes de termes positifs.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$,

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists A>0,\ \forall x \geqslant A,\ 0 < e^{-x} \leqslant \varepsilon$$

Soit $\varepsilon>0$, on impose $\varepsilon<1/2$. Soit un $A>0$ qui convienne.

$$\forall x \geqslant A,\ \forall n \geqslant 1, \quad u_n(x) = \frac{1}{n}\left(e^{-x}\right)^n \leqslant \frac{\varepsilon^n}{n} \leqslant \varepsilon^n$$

Par conséquent, comme $1-\varepsilon > 1/2$, donc $\dfrac{1}{1-\varepsilon} < 2$,

$$\forall x \geqslant A, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon^n = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \leqslant 2\varepsilon$$

Ainsi, $\forall \varepsilon>0, \exists A>0, \forall x \geqslant A, 0 \leqslant S(x) \leqslant 2\varepsilon$:

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\ln(1-e^{-x})+K) = K$. Donc $K=0$. Conclusion :

$$\boxed{\forall x>0, \qquad S(x) = -\ln(1-e^{-x})}$$

Exercice 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons
$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. u_n est continue donc continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. De plus, $u_n \geqslant 0$.
<u>Étude en $+\infty$</u> :
$$x^2 u_n(x) = x^3 e^{-nx} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
par croissance comparée, car $n > 0$.
Ainsi, $u_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).
Donc, par comparaison, $\int_0^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge (absolument). Conclusion :
$$\boxed{u_n \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+}$$
Effectuons une intégration par parties : posons
$$\begin{cases} u = x & u' = 1 \\ v = -\frac{1}{n}e^{-nx} & v' = e^{-nx} \end{cases}$$
Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-nx} = 0$, donc d'après le *théorème d'intégration par parties* les deux intégrales sont de même natures – donc convergentes d'après ci-dessus – et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{n}xe^{-nx}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{n}e^{-nx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Au moins au brouillon poser $\begin{cases} u = x & u' = \dots \\ v = \dots & v' = e^{-nx} \end{cases}$ *On vérifie évidemment ses primitives, et – fraction oblige – on vérifie que $n \neq 0$.*

$$\boxed{\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}}$$

2) *Comme l'intégrale est sur $[0, +\infty[$ qui n'est pas un segment, le seul théorème disponible est l'intégration terme à terme* sans convergence uniforme*.*

<u>Convergence simple</u> : Montrons que $\sum u_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé.

Si $x = 0$, $u_n(x) = 0$ pour tout n, et $f(0) = 0$. Donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(0) = 0 = f(0)$.
Supposons $x > 0$. $u_n(x) = x(e^{-x})^n$ est une suite géométrique de raison $q = e^{-x} \in [0, 1[$, donc convergente.
Ainsi, $\sum u_n(x)$ converge et
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) &= x\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)x} \\ &= xe^{-x}\frac{1}{1 - e^{-x}} \\ &= f(x) && \text{En multipliant par } e^x \text{ en haut et en bas} \end{aligned}$$

La démarche est identique à celle de l'exercice précédent, les calculs aussi, au x près.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } \mathbb{R}_+}$$

<u>Conclusion</u> : Appliquons le théorème d'intégration terme à terme (sans convergence uniforme).

Comme $u_n \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$.

Et $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ converge d'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$).

- (u_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}_+$ d'après 1,
- $\sum u_n$ converge simplement vers f continue par morceaux d'après ci-dessus,
- $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |u_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge d'après la remarque faite ci-dessus (Riemann)

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$$

Exercice 3 (suite du DS 2, E3A PC 2019)

1) a) Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \sqrt{t}e^{-t}$. Cette fonction est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
<u>Étude en $+\infty$</u> : $t^2\varphi(t) = t^{2,5}e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Donc $t^2\varphi(t) = o(1)$ puis $\varphi(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$).

Donc, par comparaison, φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

<u>Théorème de dérivation</u> : Posons $h(x,t) = \dfrac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$.

- $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme combinaison linéaire de fonctions intégrables ;
  $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = i\sqrt{t}e^{-t+ixt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction φ est **intégrable sur** $\mathbb{R}_+^*$ d'après ci-dessus, et

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*, \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \sqrt{t}e^{-t} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$\boxed{W \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } W'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t+ixt}\,\mathrm{d}t.}$$

b) Effectuons une intégration par partie. Comme $\dfrac{1}{-1+ix} \neq 0$, posons

$$u = \sqrt{t} \qquad u' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$
$$v = \frac{1}{-1+ix}e^{(-1+ix)t} \qquad v' = e^{(-1+ix)t}$$

On vérifie ses primitives. On pose u = ... etc. On commence par faire ses calculs au brouillon.

De plus, $\lim\limits_{t\to0} uv = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} uv = 0$ par croissance comparée, donc d'après le théorème d'intégration par partie, les deux intégrales suivantes sont de même nature, donc convergentes d'après

1)a), et

$$\begin{aligned}W'(x) &= \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t+ixt}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{i\sqrt{t}}{-1+ix}e^{(-1+ix)t}\right]_0^{+\infty} - i\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{t}(-1+ix)}e^{(-1+ix)t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{i}{2(-1+ix)}W(x)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{La fonction } W \text{ est solution } (E) : y' + \frac{1}{2(x+i)}y = 0}$$

c) La fonction W est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et solution de (E). Ainsi, W' s'exprime en fonction de W et de $x \mapsto \dfrac{1}{2(x+i)}$ qui sont $\mathscr{C}^1$: elle est donc elle-même $\mathscr{C}^1$. Par récurrence, W est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Comme $U = \Re(W)$ et $V = \Im(W)$,

$$\boxed{\text{Les fonctions } U \text{ et } V \text{ sont de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$$

d) D'après la question b, $W' + \dfrac{1}{2(x+i)}W = 0$, or $W = U + iV$, donc

$$U' + iV' + \frac{x-i}{2(1+x^2)}(U+iV) = 0$$

D'où, en développant

$$U' + \frac{xU+V}{2(1+x^2)} + i\left(V' + \frac{xV-U}{2(1+x^2)}\right) = 0$$

Or $z = a + ib = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$:

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x : \begin{cases} U'(x) = -\dfrac{V(x)+xU(x)}{2(1+x^2)} \\ V'(x) = \dfrac{U(x)-xV(x)}{2(1+x^2)} \end{cases}}$$

2) *Les fonctions R et T ne sortent pas du néant : $R = |W|$ et T est un argument de W (modulo π).*

a) <u>Fonction R</u> : Les fonctions U et V sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ d'après 1c, donc en particulier continues. Donc R est prolongeable par continuité en 0, par continuité des fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$ respectivement.

$$\boxed{\text{La fonction } R \text{ est prolongeable par continuité sur } \mathbb{R}_+ \text{ par } R(0) = \sqrt{U(0)^2 + V(0)^2} = \sqrt{\pi}.}$$

<u>Fonction T</u> : Lorsque $x \to 0$, nous avons les limites suivantes par continuité de U et V en 0 et d'après les calculs de la question 3)b) du DS2 :

$$\lim_{x\to 0} U(x) = U(0) = \sqrt{\pi} > 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} V(x) = V(0) = 0$$

De plus $V(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par quotient,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{U(x)}{V(x)} = +\infty$$

Or $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{Arctan}\, t = \dfrac{\pi}{2}$, donc

$$\boxed{\text{La fonction } T \text{ est prolongeable par continuité sur } \mathbb{R}_+ \text{ par } T(0) = \frac{\pi}{2}.}$$

b) *Ici, tout est dérivable, même $\mathscr{C}^\infty$, sauf $t \to \sqrt{t}$ qui n'est pas dérivable en 0. Donc il faut vérifier que V ne s'annule pas (pour $\frac{U}{V}$) et que $U^2 + V^2$ ne s'annule pas non plus (sinon on est $t = 0$ et $t \to \sqrt{t}$ n'est pas dérivable).*

Les fonctions U et V sont de classes $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus T est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle est $\mathscr{C}^1$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^1$.

Pour $x_0 > 0$ fixé, $V(x_0) > 0$ donc $U^2(x_0) + V^2(x_0) \geqslant V^2(x_0) > 0$. Ainsi, $x \mapsto \sqrt{U^2(x) + V^2(x)}$ est dérivable en x_0. Conclusion :

$$\boxed{\text{Les fonctions } R \text{ et } T \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$$

c) Dérivons : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, *(On ne se précipite pas, on ne saute pas d'étape, on remplace avant de développer, etc...)*

$$\begin{aligned}
R'(x) &= \frac{2U'(x)U(x) + 2V'(x)V(x)}{2\sqrt{U^2(x) + V^2(x)}} \\
&= \frac{-2U(x)\frac{V(x)+xU(x)}{2(1+x^2)} + 2V(x)\frac{U(x)-xV(x)}{2(1+x^2)}}{2\sqrt{U^2(x) + V^2(x)}} && \text{D'après 1d} \\
&= \frac{-U(x)V(x) - xU^2(x) + V(x)U(x) - xV^2(x)}{2(1+x^2)\sqrt{U^2(x) + V^2(x)}} \\
&= \frac{-x(U^2(x) + V^2(x))}{2(1+x^2)\sqrt{U^2(x) + V^2(x)}} \\
&= -\frac{x}{2(1+x^2)}R(x)
\end{aligned}$$

Et *(Évidemment, vous avez besoin d'un brouillon et d'écrire $(\mathrm{Arctan}\ f)' = \frac{f'}{1+f^2}$, $f = \frac{U}{V}$ donc $f' = \ldots$)*

$$\begin{aligned}
T'(x) &= \frac{\frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{V^2(x)}}{1 + \frac{U^2(x)}{V^2(x)}} \\
&= \frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{V^2(x) + U^2(x)} \\
&= \frac{-\frac{V(x)+xU(x)}{2(1+x^2)}V(x) - U(x)\frac{U(x)-xV(x)}{2(1+x^2)}}{V^2(x) + U^2(x)} \\
&= \frac{-V^2(x) - xU(x)V(x) - U^2x) + xU(x)V(x)}{2(1+x^2)(V^2(x) + U^2(x))} \\
&= -\frac{1}{2(1+x^2)}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{R \text{ est solution de } y' = -\frac{x}{2(1+x^2)}y \text{ et } T \text{ de } y' = -\frac{1}{2(1+x^2)} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$$

Pour T, il était impossible de retrouver facilement du Arctan après dérivation, donc il est logique d'avoir une équation différentielle $y' = f$ avec f une fonction fixée.

d) <u>Résolution de $y' = -\frac{x}{2(1+x^2)}y$:</u>

Posons $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln(1+x^2)$. Comme $f'(x) = \dfrac{2x}{4(1+x^2)} = \dfrac{x}{2(1+x^2)}$, les solution de l'équation sont les y définies par

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) &= Ce^{-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)}\\ &= Ce^{\ln\left((1+x^2)^{-\frac{1}{4}}\right)}\\ &= \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\end{aligned}$$

Où $C \in \mathbb{R}$ dépend des conditions initiales.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions sur } \mathbb{R} \text{ est Vect}\left(x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\right)}$$

<u>Résolution de $y' = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$</u> :

Il suffit de primitiver : $y(x) = -\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + C$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions sur } \mathbb{R} \text{ est } \left\{x \mapsto -\frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + C \mid C \in \mathbb{R}\right\}}$$

e) <u>Expression de R</u> : R est solution de la première équation donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > 0, \qquad R(x) = \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}$$

Par continuité en 0, on a $\lim\limits_{x\to 0} R(x) = \sqrt{\pi} = C$. Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad R(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}}$$

<u>Expression de T</u> : T est solution de la seconde équation donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > 0, \qquad T(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + C$$

Par continuité en 0, on a $\lim\limits_{x\to 0} T(x) = \dfrac{\pi}{2} = C$. Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad T(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x}$$

3) Toutes les égalités suivantes sont sur $\mathbb{R}_+$.

Pour retrouver $\dfrac{U}{V}$ à partir de Arctan $\dfrac{U}{V}$, il faut utiliser $\tan(arctant)) = t$ (ce qui est toujours vrai dans ce sens là [1]) :

$$\frac{U}{V} = \tan(T)$$

De plus, en élevant au carré l'expression de R,

1. On peut d'ailleurs vérifier que $T(x) = \operatorname{Arctan}\dfrac{U(x)}{V(x)} \in]-\pi/2, \pi/2[$, mais c'est inutile : c'est vrai par construction de T. Dans l'autre sens, $\operatorname{Arctan}(\tan(t)) = t$ uniquement si $t \in]-\pi/2, \pi/2[$.

$$\begin{aligned}
& U^2+V^2=R^2 & \\
\Longrightarrow & V^2(1+\tan^2(T))=R^2 & \text{Car } U=\tan(T)V \\
\Longrightarrow & V^2=R^2\cos^2(T) & \text{Car } 1+\tan^2=\tan'=\frac{1}{\cos^2} \\
\Longrightarrow & V=|R\cos(T)| &
\end{aligned}$$

Car $V>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $V(0)=0$. Or $T=\operatorname{Arctan}\dfrac{U}{V}\in]-\pi/2,\pi/2[$ par construction, donc $\cos(T)\geqslant 0$. Par construction, $R\geqslant 0$, donc

$$\forall x\in\mathbb{R}_+\qquad V(x)=R(x)\cos(T(x))=\frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac14}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac12\operatorname{Arctan}x\right)$$

Or $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$:

$$\forall x\in\mathbb{R}_+\qquad V(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac14}}\sin\left(\frac12\operatorname{Arctan}x\right)$$

De plus, $U=\tan(T)V=R\cos(T)\tan(T)=R\sin(T)$, donc

$$\forall x\in\mathbb{R}_+\qquad U(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac14}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac12\operatorname{Arctan}x\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac14}}\cos\left(\frac12\operatorname{Arctan}x\right)$$

Comme U est paire et V est impaire, de même que les membres de droite des égalités ci-dessus, les expressions trouvées sont valables sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+\qquad \begin{cases} U(x)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac14}}\cos\left(\dfrac12\operatorname{Arctan}x\right)\\[2ex] V(x)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac14}}\sin\left(\dfrac12\operatorname{Arctan}x\right)\end{cases}}$$

Puisque $R=|W|$ et T un argument de W modulo π, on a $W=\pm(R\cos T+iR\sin T)$, d'où U et V au signe près.

4)
- Résolvons l'équation différentielle $y'=-\dfrac{i}{2(ix-1)}y\Leftrightarrow y'=-\dfrac12\dfrac{1}{x+i}y$.

  D'après la question préliminaire, une primitive de $x\mapsto -\dfrac12\dfrac{1}{x+i}$ est $x\mapsto -\dfrac14\ln(x^2+1^2)+\dfrac{i}{2}\operatorname{Arctan}(x)$, donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont :

$$x\mapsto \mu\exp\left(-\frac14\ln(x^2+1^2)+\frac{i}{2}\operatorname{Arctan}(x)\right)=\mu\frac{1}{(x^2+1)^{1/4}}e^{\frac{i}{2}\operatorname{Arctan}(x)},\quad \text{où } \mu\in\mathbb{C}.$$

- Comme W est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il existe $\mu\in\mathbb{C}$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad W(x)=\mu\frac{1}{(x^2+1)^{1/4}}e^{\frac{i}{2}\operatorname{Arctan}(x)}.$$

  Comme $W(0)=U(0)+iV(0)=\sqrt{\pi}$, on a $\mu=W(0)=\sqrt{\pi}$, et, par suite, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\boxed{W(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{1/4}}e^{\frac{i}{2}\operatorname{Arctan}(x)}}$$

- En passant à la partie réelle et à la partie imaginaire, on retrouve bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{\frac{1}{4}}} \cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(x)\right) \quad \text{et} \quad V(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(x)\right)$$

On retrouve bien les expressions données à la question précédente.

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos^n(xt)\right| \leqslant \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = f_{-1/2,1}(t) \quad \text{et} \quad \left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin^n(xt)\right| \leqslant \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = f_{-1/2,1}(t).$$

Or $f_{-1/2,1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après la remarque de la question 1b du DS), donc $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos^n(xt)$ et $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin^n(xt)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui assure en particulier l'existence de $U_n(x)$ et $V_n(x)$.

a) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$, donc

$$\begin{aligned}
U_2(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos^2(xt) \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{1+\cos(2xt)}{2} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(2xt) \,\mathrm{d}t \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{1}{2} \left(U(0) + U(2x)\right) \\
\text{et} \quad V_2(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin^2(xt) \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{1-\cos(2xt)}{2} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(2xt) \,\mathrm{d}t \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{1}{2} \left(U(0) - U(2x)\right).
\end{aligned}$$

b) Si $x = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n(0) = U(0) \underset{n \to +\infty}{\to} U(0)$.

Prenons pour la suite $x \neq 0$.

$\star$ Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} |\cos^n(xt)|$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} |\cos^n(xt)| \underset{n \to +\infty}{\to} \begin{cases} 0 & \text{si } xt \notin \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow t \notin \frac{\pi}{x}\mathbb{Z} \\ \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} & \text{si } xt \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow t \in \frac{\pi}{x}\mathbb{Z} \end{cases}$.

La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction

$$f : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin \frac{\pi}{x}\mathbb{Z} \\ \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} & \text{si } t \in \frac{\pi}{x}\mathbb{Z} \end{cases}$$

De plus, sur tout $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, f a un nombre fini de point de discontinuité ($[a, b] \cap \frac{\pi}{x}\mathbb{Z}$) et, en chacun de ces points, f a une limite nulle à droite et à gauche, donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|f_n(t)| \leqslant \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = \varphi(t),$$

où $\varphi = f_{-1/2,1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (toujours d'après la remarque de la question 1b du DS).

- D'où, par convergence dominée,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t) \,\mathrm{d}t = 0.$$

$\star$ De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par l'inégalité triangulaire généralisée (les intégrales convergent)

$$|U_n(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos^n(xt) \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} |\cos^n(xt)| \, \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} U_n(x) = 0.$$

On est obligé de poser ces fonctions f_n avec la valeur absolue car sinon, on n'a pas convergence simple sur $\mathbb{R}_+^*$...