Devoir de Mathématiques numéro 3

Les deux premiers exercices vous serviront de révision pour le concours blancs : faites-les avant la fin des vacances. Je vous transmettrais la correction vers le 1er novembre.

Exercice 1

Soit $u_n(x) = \dfrac{1}{n}e^{-nx}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$.

1) Déterminer l'ensemble de définition I de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

2) Montrer que S est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. En déduire que S est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et exprimez S' sans symbole de sommation.

3) Déduire S de l'expression de S' et de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $u_n(x) = xe^{-nx}$. Montrer que u_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Exercice 3 (suite du DS 2)

On se référera au sujet de l'épreuve numéro 2, exercice 2, pour les notations et résultats pouvant être utiles. Nous avons montré (question « 2 » de la partie 1) que, pour tout x réel, les fonctions

$$t \mapsto \frac{e^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}} \qquad \text{et} \qquad t \mapsto \frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}$$

sont intégrables sur $]0, +\infty[$.
On définit alors les deux fonctions U et V sur $\mathbb{R}$ par

$$U(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad V(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

1) Pour tout réel x, on pose $W(x) = U(x) + iV(x)$ où i vérifie $i^2 = -1$.

- **a)** Montrer que la fonction W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- **b)** Démontrer que la fonction W est solution d'une équation différentielle (E) linéaire du premier ordre que l'on explicitera et que l'on ne cherchera pas à résoudre ici. (On pourra utiliser une intégration par parties)
- **c)** En déduire que U et V sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- **d)** Prouver que l'on a pour tout réel x : $\begin{cases} U'(x) = -\dfrac{V(x) + xU(x)}{2(1+x^2)} \\ V'(x) = \dfrac{U(x) - xV(x)}{2(1+x^2)} \end{cases}$

2) Pour tout réel $x > 0$, on note $R(x) = \left[U^2(x) + V^2(x)\right]^{1/2}$ et $T(x) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{U(x)}{V(x)}\right)$.

On rappelle que $V(x) > 0$ lorsque $x > 0$, ce qui montre que T est bien définie.

- **a)** Prouver que les fonctions R et T sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.
- **b)** Montrer que les fonctions R et T sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **c)** Démontrer que R et T sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de deux équations différentielles linéaires du premier ordre.
- **d)** Résoudre ces équations différentielles sur $\mathbb{R}$.
- **e)** En déduire une expression sur $\mathbb{R}_+$ de R et de T à l'aide de fonctions usuelles.

3) Donner des expressions de $U(x)$ et de $V(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

4) Retrouver les résultats obtenus à la question précédente en résolvant l'équation différentielle (E) obtenue à la question 1b.

5) Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose

$$U_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos^n(xt)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad V_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin^n(xt)\,\mathrm{d}t$$

- **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $U_2(x)$ et $V_2(x)$ à l'aide de $U(x)$ et $V(x)$.
- **b)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(x)$.