Devoir de Mathématiques numéro 3

Correction

Une remarque de rédaction : prenez l'habitude de ne pas écrire d'équations sans préciser comment vous avez choisi les variables : n'oubliez pas les quantificateurs. Au lieu d'écrire

$$|f(t)| \leqslant Ct^n$$

écrivez,

$$\forall t \geqslant A, \qquad |f(t)| \leqslant Ct^n$$

Ce qui, au passage, vous évite des erreurs dans les questions 1)3)c), 2)1)a) et 2)2)a).

Exercice 1 (E3A PC 2010)

Les fonctions f de E vérifient :

$$\exists A > 0 \quad \exists C > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} / \qquad \forall t \geqslant A, \qquad |f(t)| \leqslant Ct^n$$

En particulier : elles ne sont pas forcément bornée ($t \mapsto t^2 \in E$) et la majoration n'est valable que si $t \geqslant A$. Lorsqu'on veut montrer qu'une fonction f appartient à E, il faut **expliciter** A, C et n, expliquer lesquels on choisit (question 1.2).
On pouvait aussi remarquer que les fonctions f de E vérifient exactement

$$\exists n \in \mathbb{N} / \qquad f(t) = O_{+\infty}(t^n)$$

Partie 1 (la transformation de Laplace)

1) a) Soit $x > 0$ fixé. La fonction $t \mapsto e^{-xt}$ est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $A > 0$,

$$\int_0^A e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^A = \frac{1}{x} - \frac{e^{-xA}}{-x}$$

Donc $\boxed{\text{l'intégrale } I_0(x) \text{ est convergente et } I_0(x) = \dfrac{1}{x}.}$

b) Soit $x > 0$ fixé. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, $t \mapsto t^n e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ car composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$. De plus $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 t^n e^{-xt} = 0$ par croissance comparée donc,

$$t^n e^{-xt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Or $\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (Riemann $\alpha = 2$), donc $\boxed{I_n(x) \text{ converge.}}$
Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie d'après la question 1)a).

- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. L'intégrale $I_{n+1}(x)$ converge d'après ci-dessus.

  Intégrons par parties : par croissance comparée $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n+1} \times \dfrac{e^{-xt}}{-x} = 0$. Donc, d'après le théorème d'intégration par partie,

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x) &= \int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t^{n+1} \times \frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (n+1)t^n \frac{e^{-xt}}{-x}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{n+1}{x} I_n(x) \end{aligned}$$

  De plus, d'après $\mathcal{H}(n)$, $I_n(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$. Par conséquent

$$I_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} \times \frac{n!}{x^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$$

- Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0,\ I_n(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}.}$

2) **a)** Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$:

- Pour tout $t \geqslant 1$, $|0| \leqslant 1$ donc $0 \in E$ avec $A = 1$, $C = 1$ et $n = 0$. Ainsi $\underline{E \neq \emptyset}$. *(Important !)*
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f_1, f_2 \in E^2$, avec A_1, A_2, C_1, C_2, n_1 et n_2 les constantes associées.

  Posons
  ▷ $A = \max(A_1, A_2, 1) > 0$
  ▷ $C = |\lambda|C_1 + C_2 > 0$
  ▷ $n = \max(n_1, n_2)$

  Pour tout $t \geqslant A = \max(A_1, A_2, 1)$,

$$|\lambda f_1(t) + f_2(t)| \leqslant |\lambda||f_1(t)| + |f_2(t)| \leqslant |\lambda|C_1 t^{n_1} + C_2 t^{n_2} \leqslant |\lambda|C_1 t^n + C_2 t^n \leqslant Ct^n$$

  De plus $\lambda f_1 + f_2$ est continue. Ainsi $\lambda f_1 + f_2 \in E$.

Par conséquent $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R}).}$

b) Soit f une fonction continue et bornée sur $[0,+\infty[$. Notons $M = \sup\limits_{[1,+\infty[} |f|$ et $C = M + 1 > 0$.

Alors, pour tout $t \geqslant 1$, $|f(t)| \leqslant Ct^0$. Donc $\boxed{f \in E.}$ $(C = M + 1,\ A = 1 \text{ et } n = 0)$

c) Soit f une fonction polynomiale de degré n.

La fonction $g : t \mapsto f(t)/t^n$ est continue sur $[1,+\infty[$ et a une limite finie en $+\infty$ donc est bornée sur $[1,+\infty[$. Notons $C = \sup\limits_{[1,+\infty[} |g| + 1 > 0$. Par définition, pour tout $t \geqslant 1$, $|g(t)| \leqslant C$.

Alors, pour tout $t \geqslant 1$, $|f(t)| \leqslant Ct^n$. Donc $\boxed{f \in E.}$ $(C = \sup\limits_{[1,+\infty[} |g| + 1,\ A = 1 \text{ et } n = \deg f)$

Autre preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^n$ appartient à E ($A = 1$, $C = 1$, $n = n$).
De plus, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (1)2)a)), donc $\mathrm{Vect}\,(1, t, \dots, t^n, \dots) \subset E$, c'est-à-dire

$$\boxed{\textit{L'ensemble des fonctions polynomiales appartient } E.}$$

3) **a)** Soit x un réel strictement positif.

La fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

Soit $A > 0$, $C > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\forall t \geqslant A$, $|f(t) \leqslant Ct^n$. Ainsi,

$$\forall t \geqslant A \qquad |t^2 f(t)e^{-xt}| \leqslant Ct^{n+2}e^{-xt} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \text{(croissance comparée, } x > 0)$$

Donc, $|f(t)e^{-xt}| = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Or $\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après Riemann.

En conclusion, par comparaison,

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto f(t)e^{-xt} \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[.}$$

b) (cours)

c) On fixe un réel $x_0 > 0$. Appliquons le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre sur l'intervalle $[x_0, +\infty[$.

- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $[x_0, +\infty[$ car exponentielle l'est.
- Pour tout $x \in [x_0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- La fonction $\varphi(t) = |f(t)|e^{-x_0 t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après 3)a) et

$$\forall (x,t) \in [x_0, +\infty[\times[0, +\infty[\qquad |f(t)e^{-xt}| \leqslant \varphi(t)$$

(La majoration doit être vraie « pour tout t dans le domaine d'intégration », et pas — par exemple — juste pour $t \geqslant A$)

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme,

$$\boxed{\text{la fonction } \mathcal{L}(f) \text{ est définie et continue sur } [x_0, +\infty[.}$$

Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. Posons $x_0 = x/2$, alors $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $[x_0, +\infty[= [x/2, +\infty[$ qui contient x, donc $\mathcal{L}(f)$ est continue en x. Ainsi $\mathcal{L}(f)$ est continue en x pour tout $x > 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathcal{L}(f) \text{ est continue sur }]0, +\infty[.}$$

4) D'après 3)c), pour tout $f \in E$, $\mathcal{L}(f)$ existe et est une fonction définie définies et continues sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles. De plus, par linéarité de l'intégrale,

$$\forall (f,g) \in E^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{L}(f + \lambda g) = \mathcal{L}(f) + \lambda \mathcal{L}(g)$$

En conclusion, $\boxed{\text{La transformée de Laplace est une application linéaire de } E \text{ dans } \mathscr{C}^0(]0, +\infty[, \mathbb{R}).}$

Partie 2 (Quelques propriétés des transformées de Laplace)

1) On considère des réels $A > 0$, $C > 0$ et un entier n tels que $|f(t)| \leqslant Ct^n$ pour tout réel $t \geqslant A$.

a) Soit $x > 0$. D'après 1)1)b), la fonction $t \mapsto Ct^n e^{-xt}$ est intégrable sur $[A, +\infty[$. En intégrant l'inégalité ci-dessus, et en remarquant que $t^n e^{-xt} \geqslant 0$ sur $[0, A]$, il vient

$$\int_A^{+\infty} |f(t)e^{-xt}| \, \mathrm{d}t \leqslant C \int_A^{+\infty} t^n e^{-xt} \, \mathrm{d}t \leqslant C \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} \, \mathrm{d}t = C I_n(x) = C \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Or $|\mathcal{L}(f)(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-xt}| \, \mathrm{d}t = \int_0^A |f(t)e^{-xt}| \, \mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} |f(t)e^{-xt}| \, \mathrm{d}t$.

En conclusion, $\boxed{|\mathcal{L}(f)(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^A |f(t)e^{-xt}| \, \mathrm{d}t + C\frac{n!}{x^{n+1}} \text{ pour tout réel } x > 0.}$

b) La fonction $t \mapsto |f(t)|$ est continue sur le segment $[0, A]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes. Soit $M = \sup\limits_{[0,A]} |f|$.

$$\forall x > 0 \qquad \int_0^A |f(t)e^{-xt}| \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^A Me^{-xt} \, \mathrm{d}t = -M \left(\frac{e^{-xA} - 1}{x} \right) \leqslant \frac{2M}{x}$$

Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\boxed{\displaystyle\int_0^A |f(t)e^{-xt}| \, \mathrm{d}t \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.}$

Attention ! Warning ! Ce n'est pas parce que la fonction (de t) dépendant d'un paramètre (x ou n) tend vers 0 (lorsque ce paramètre bouge) que son intégrale tend vers 0. Ne JAMAIS intervertir une limite et une intégrale sans théorème.

c) D'après 1)a), pour tout $x > 0$, $|\mathcal{L}(f)(x)| \leqslant \int_0^A |f(t)e^{-xt}|\,\mathrm{d}t + C\dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Or $\int_0^A |f(t)e^{-xt}|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ d'après 1)b), et $C\dfrac{n!}{x^{n+1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Donc $\boxed{\mathcal{L}(f)(x) \to 0 \text{ lorsque } x \to +\infty.}$

2) **a)** On fixe un réel $x_0 > 0$. Appliquons le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme sur l'intervalle $[x_0, +\infty[$. Posons $h(x,t) = f(t)e^{-xt}$ pour $(x,t) \in [x_0, +\infty[\times\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x,t) = f(t)e^{-xt}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[x_0, +\infty[$,
- Pour tout $x \in [x_0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est **intégrable** sur $\mathbb{R}_+$ d'après 3)a), la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -tf(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction $\varphi : t \mapsto t|f(t)|e^{-x_0 t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (de même qu'en 1)3)a) $= o(1/t^2)$) et

$$\forall (x,t) \in [x_0, +\infty[\times\mathbb{R}_+ \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = |tf(t)e^{-xt}| \leqslant \varphi(t)$$

(Les remarques de la question 1)3)c) restent valables. De plus, l'hypothèse $t \mapsto h(x,t)$ **intégrable** *doit être présente !)*

Donc, d'après le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme,

$$\boxed{\text{la fonction } \mathcal{L}(f) \text{ est } C^1 \text{ sur } [x_0, +\infty[\text{ et } (\mathcal{L}(f))'(x) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t.}$$

b) $\mathcal{L}(f)$ est donc C^1 sur $[x_0, +\infty[$ pour tout $x_0 > 0$, donc elle est C^1 sur la réunion de ces intervalles, c'est-à-dire sur $]0, +\infty[$.

De plus, on a toujours, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$(\mathcal{L}(f))'(x) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

3) **a)** Effectuons une intégration par parties. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. Pour tout $T > 0$,

$$\int_0^T f'(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)e^{-xt}\Big]_0^T - \int_0^T f(t)(-xe^{-xt})\,\mathrm{d}t = f(T)e^{-xT} - f(0) + x\int_0^T f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Or $\lim\limits_{T\to+\infty} f(T)e^{-xT} = 0$. Ainsi, en prenant la limite lorsque $T \to +\infty$,

$$\boxed{\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)}$$

On peut aussi appliquer le théorème d'intégration par partie, évidemment.

b) Soit $A > 0$, $C > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ qui conviennent pour f' ($f' \in E$ par hypothèse). Alors

$$\forall t \geqslant A \qquad |tf'(t)| \leqslant Ct^{n+1}$$

Donc $A_h = A$, $C_h = C$ et $n_h = n+1$ conviennent, et $\boxed{h \in E}$

(Attention ! Dériver une inégalité est une **abomination***. exemple : $|\sin t| \leqslant 1$ et pourtant $\cos t \neq 0$. Voir pire : $|\sin(e^t)| \leqslant 1$ (donc dans E) et sa dérivée ($t \mapsto e^t\cos(e^t)$) n'est pas dans E)*

Montrons l'égalité : effectuons une intégration par parties. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. Pour tout $T > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^T tf'(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t &= \Big[f(t)te^{-xt}\Big]_0^T - \int_0^T f(t)(e^{-xt} - xte^{-xt})\,\mathrm{d}t \\ &= f(T)Te^{-xT} - \int_0^T f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t + x\int_0^T tf(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{T\to+\infty} f(T)Te^{-xT}=0$, et on reconnaît $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t=-(\mathcal{L}(f))'(x)$.
Ainsi, en prenant la limite lorsque $T\to+\infty$,

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\quad \mathcal{L}(h)(x)=-\mathcal{L}(f)(x)-x(\mathcal{L}(f))'(x)}$$

<u>Autre méthode pour l'égalité</u> : Plus d'abstraction et moins de calculs. Soit $g(t)=tf(t)$.
Avec $A_g=A_f$, $C_g=C_f$ et $n_g=n_f+1$, on a $g\in E$. De plus, g est de classe $\mathscr{C}^1$ (comme produit de $\mathscr{C}^1$), et

$$g'(t)=f(t)+tf'(t)=f(t)+h(t)$$

Or $f\in E$ et $h\in E$ donc, comme E est un espace vectoriel, $g'\in E$.
Nous sommes donc dans les hypothèse de la question 3)b) ci-dessus :

$$\forall x\in]0,+\infty[\qquad \mathcal{L}(g')(x)=x\mathcal{L}(g)(x)-g(0)$$

Par linéarité de $\mathcal{L}$ (question 1)4)), $\mathcal{L}(g')=\mathcal{L}(f+h)=\mathcal{L}(f)+\mathcal{L}(h)$.
De plus $\mathcal{L}(g)=-(\mathcal{L}(f))'$ d'après 2)b), et $g(0)=0$. Donc finalement, en remplaçant,

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\quad \mathcal{L}(h)(x)=-\mathcal{L}(f)(x)-x(\mathcal{L}(f))'(x)}$$

c) On se contente d'appliquer 2)3)a) deux fois (d'abord à f') :

$$\boxed{\mathcal{L}(f'')=x\mathcal{L}(f')-f'(0)=x^2\mathcal{L}(f)-xf(0)-f'(0)}$$

Partie 3 (une application de la transformation de Laplace)

1) L'équation différentielle linéaire d'ordre 2 $y''-ty+2py=0$ est à coefficients continus sur $I=\mathbb{R}$, le coefficient devant y'' est bien égal à 1. Ainsi, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a existence et unicité de la solution Y sur $I=\mathbb{R}$ du problème de Cauchy $(\mathcal{P})$.
Nous verrons le théorème de Cauchy-Lipschitz au moment du chapitre sur les équations différentielles.

2) Partons de ce que l'on sait :

$$f''-tf'+2pf=0$$

Les fonctions f, f' et f'' appartiennent à E, donc $h:t\mapsto tf'(t)\in E$ (d'après 2)3)b)) et l'application $\mathcal{L}$ est linéaire, donc on trouve

$$\mathcal{L}(f''-tf'+2pf)=\mathcal{L}(f'')-\mathcal{L}(tf')+2p\mathcal{L}(f)=\mathcal{L}(0)=0$$

Or, d'après 2)3)b) et c) on sait que

$$\mathcal{L}(f'')=x^2\mathcal{L}(f)-xf(0)-f'(0)=x^2\mathcal{L}(f)-x\qquad\text{et}\qquad \mathcal{L}(tf')=\mathcal{L}(h)=-\mathcal{L}(f)-x(\mathcal{L}(f))'$$

avec $f(0)=1$ et $f'(0)=0$. On a posé $U=\mathcal{L}(f)$, donc il vient

$$\forall x>0\qquad x^2U(x)-x-(-U(x)-xU'(x))+2pU(x)=0$$

En divisant par $x>0$ et en réarrangeant, il nous reste

$$U'(x)+\left(x+\frac{2p+1}{x}\right)U(x)=1$$

Ainsi $\boxed{U \text{ est une solution de } (J) \text{ sur }]0,+\infty[.}$

3) **a)** Soit $n\in\mathbb{N}$. On effectue une intégration par parties

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \int_0^x t^{2n+1}e^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2}e^{\frac{t^2}{2}}\right]_0^x-\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{2n+2}te^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{x^{2n+2}}{2n+2}e^{\frac{x^2}{2}}-\frac{1}{2n+2}\int_0^x t^{2n+3}e^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{x^{2n+2}}{2n+2}e^{\frac{x^2}{2}}-\frac{1}{2n+2}f_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

En conclusion : $\boxed{f_n(x)=\dfrac{x^{2n+2}}{2n+2}e^{\frac{x^2}{2}}-\dfrac{1}{2n+2}f_{n+1}(x)\text{ pour tout } x\in\mathbb{R}.}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad f_n(x) = (-1)^{n+1}2^n n! + n! e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^k}{(n-k)!} x^{2n-2k}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $f_0(x) = \displaystyle\int_0^x t e^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[e^{\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = e^{\frac{x^2}{2}} - 1 = (-1)^1 2^0 0! + 0! e^{\frac{x^2}{2}} (-1)^0 x^0$ Donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$f_n(x) = (-1)^{n+1}2^n n! + n! e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^k}{(n-k)!} x^{2n-2k}$$

Calculons $f_{n+1}(x)$ à l'aide de la formule du 2)a) :

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= x^{2n+2} e^{\frac{x^2}{2}} - (2n+2) f_n(x) \\
&= x^{2n+2} e^{\frac{x^2}{2}} - 2(n+1)\left((-1)^{n+1}2^n n! + n! e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^k}{(n-k)!} x^{2n-2k}\right) \\
&= x^{2n+2} e^{\frac{x^2}{2}} + (-1)^{n+2}2^{n+1}(n+1)! + (n+1)! e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{2^{k+1}}{(n-k)!} x^{2n-2k} \\
&= (-1)^{n+2}2^{n+1}(n+1)! + (n+1)! e^{\frac{x^2}{2}} \frac{(-1)^0 2^0}{(n+1)!} x^{2n+2-0} \\
&\qquad + (n+1)! e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \frac{2^k}{(n-k+1)!} x^{2n-2k+2} \\
&= (-1)^{n+2}2^{n+1}(n+1)! + (n+1)! e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{2^k}{((n+1)-k)!} x^{2(n+1)-2k}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad f_n(x) = (-1)^{n+1}2^n n! + n! e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^k}{(n-k)!} x^{2n-2k}}$

4) **a)** C'est une équation différentielle de la forme $u' = a(x)u$, les solutions sont donc de la forme $u(x) = C\exp(A(x))$ avec A une primitive de a et $C \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$u(x) = C \exp - \left(\frac{x^2}{2} + (2p+1)\ln x\right) = C \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+1}}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Une base de l'espace des solutions de } (J') \text{ est } \widetilde{u}(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+1}}.}$

Les solutions sont de la forme Cu, donc l'ensemble des solution est $\mathrm{Vect}\,(u)$.

b) On note U_0 la fonction u correspondant à $C = 0$. On vérifie que U_0 est solution de (J) en injectant l'expression de U_0 dans (J). *(preuve laissée au lecteur — dans une copie il faut bien sûr faire le calcul)*
L'ensemble des solutions de (J) est l'espace affine constitué des fonctions $U_0 + C\widetilde{u}$ où U_0 est une solution particulière de l'équation avec second membre et $\widetilde{u}$ une base des solutions de l'équation homogène.
Donc l'ensemble des solutions de (J) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ est constitué des fonctions de la forme

$$u(x) = C\widetilde{u}(x) + U_0(x) = C\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+1}} + p! \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{2^k}{(p-k)!} \frac{1}{x^{2k+1}}$$

où C est un réel quelconque.

5) **a)** D'après 1)1)b), si on note M_n la restriction à $[0,+\infty[$ du monôme $t \mapsto t^n$, on a $\mathcal{L}(M_n) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$. Ainsi, par combinaison linéaire, il vient

$$U_0(x) = p!\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \frac{2^k}{(p-k)!}\frac{1}{x^{2k+1}} = p!\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k 2^k}{(p-k)!(2k)!}\frac{(2k)!}{x^{2k+1}} = p!\sum_{k=0}^{p}\frac{(-2)^k}{(p-k)!(2k)!}\mathcal{L}(M_{2k})$$

$$\boxed{\text{En posant } R(X) = p!\sum_{k=0}^{p}\frac{(-2)^k}{(p-k)!(2k)!}X^{2k}, \text{ il vient } \mathcal{L}(R_0) = U_0.}$$

b) On calcule $R'' - XR' + 2pR$ et on trouve 0, de plus $R'(0) = 0$ et $R(0) = 1$. Donc, comme on a admis l'unicité de la solution de $(\mathcal{P})$,

$$\boxed{R \text{ est la solution de } (\mathcal{P}) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$