Lycée St Joseph — Pour le jeudi 15 novembre 2018
Classe de PC

Devoir de Mathématiques numéro 3

Exercice 1

Pour les 3/2 : La question 1 de la partie 3 doit être admise.

Ce problème a pour objet l'étude de la transformation de Laplace.

Les parties I et II sont consacrées à la définition et à certaines propriétés de cette transformation. Les résultats de ces deux parties pourront être admis pour aborder la partie III. Enfin, la partie IV (partielle) est totalement indépendante des parties II et III.

Dans tout ce problème, E désignera l'ensemble constitué par toutes les fonctions f, définies et continues sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles et vérifiant la propriété suivante :
il existe un réel $A > 0$, un réel $C > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall t \geqslant A, \qquad |f(t)| \leqslant Ct^n$$

Partie 1 (La transformation de Laplace)

1) Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel $x > 0$, on considère l'intégrale impropre

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

a) Vérifier que pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $I_0(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est convergente et que

$$I_0(x) = \frac{1}{x}$$

b) En effectuant une démonstration par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel $x > 0$, l'intégrale $I_n(x)$ est convergente et

$$I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

2) **a)** Montrer que, muni des opérations usuelles, E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles.

b) Vérifier que toute fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$ appartient à E.

c) Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ appartient à E.

3) On se donne $f \in E$.

a) Soit x un réel strictement positif ; montrer que la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
On notera alors jusqu'à la fin du problème

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

b) Énoncer le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

c) On fixe un réel $x_0 > 0$. Montrer que l'application $x \mapsto \mathcal{L}(f)(x)$ est continue sur l'intervalle $[x_0, +\infty[$. En déduire que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

4) Montrer que l'application $\mathcal{L} : f \mapsto \mathcal{L}(f)$, appelée transformation de Laplace, est une application linéaire de E dans l'espace $\mathscr{C}^0(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ constitué des applications définies et continues sur $]0,+\infty[$ et à valeurs réelles.

Partie 2 (Quelques propriétés des transformées de Laplace)
Dans cette partie, on se donne $f \in E$.

1) On considère des réels $A > 0$, $C > 0$ et un entier n tels que $|f(t)| \leqslant Ct^n$ pour tout réel $t \geqslant A$.

a) Montrer que
$$|\mathcal{L}(f)(x)| \leqslant \int_0^A |f(t)e^{-xt}|\,\mathrm{d}t + C\frac{n!}{x^{n+1}}$$
pour tout réel $x > 0$.

b) Montrer que
$$\int_0^A |f(t)e^{-xt}|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

c) En déduire que $\mathcal{L}(f)(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

2) **a)** On fixe un réel $x_0 > 0$. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $[x_0,+\infty[$.

b) En déduire que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que
$$(\mathcal{L}(f))'(x) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$
pour tout $x \in]0,+\infty[$.

3) On suppose de plus que f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et que $f' \in E$.

a) Montrer que
$$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$
pour tout $x \in]0,+\infty[$.

b) Vérifier que la fonction $h : t \mapsto tf'(t)$ appartient à E et montrer que
$$\mathcal{L}(h)(x) = -\mathcal{L}(f)(x) - x(\mathcal{L}(f))'(x)$$
pour tout $x \in]0,+\infty[$.

c) On suppose que f est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$ et que $f'' \in E$. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\mathcal{L}(f'')(x)$ en fonction de x, $\mathcal{L}(f)(x)$, $f(0)$ et $f'(0)$.

Partie 3 (Une application de la transformation de Laplace)
En dehors de la question 3, aucune notion sur les équations différentielles n'est nécessaire.
Dans cette partie, on se donne un entier $p \geqslant 1$ et on considère :

- le problème de Cauchy
$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y''(t) - ty'(t) + 2py(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$
où y désigne une fonction définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles
- l'équation différentielle
$$(J) \quad u'(x) + \left(x + \frac{2p+1}{x}\right)u(x) = 1$$
où u désigne une fonction définie et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, à valeurs réelles.

1) Montrer que $(\mathcal{P})$ possède une solution et une seule définie sur tout $\mathbb{R}$, que l'on notera Y.
L'objectif de cette partie est d'expliciter Y en passant par l'intermédiaire de sa transformée de Laplace. Dans ce but, on note f la restriction de Y à l'intervalle $[0,+\infty[$ et on admet que f, f' et f'' appartiennent à E. On note alors $U = \mathcal{L}(f)$.

2) À l'aide des résultats de la partie 2, montrer que U est une solution de (J) sur $]0,+\infty[$.

3) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note f_n la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^{2n+1}e^{\frac{x^2}{2}}$ qui s'annule en 0.

a) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier n et tout réel x une relation entre $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.

b) En déduire que

$$f_n(x) = (-1)^{n+1}2^n n! + n! e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^k}{(n-k)!} x^{2n-2k}$$

pour tout entier n et tout réel x.

4) **a)** Donner une base de l'espace des solutions de l'équation sans second membre

$$(J') \quad u'(x) + \left(x + \frac{2p+1}{x}\right) u(x) = 0$$

associée à (J) sur $]0, +\infty[$.

b) En déduire que l'ensemble des solutions de (J) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ est constitué des fonctions de la forme

$$u(x) = C\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+1}} + p! \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{2^k}{(p-k)!} \frac{1}{x^{2k+1}}$$

où C est un réel quelconque.

5) **a)** Parmi les solutions ci-dessus, on désigne par U_0 celle correspondant à $C = 0$.

Montrer, à l'aide des résultats de la partie 1, qu'il existe un polynôme R, dont on donnera les coefficients, tel que la restriction R_0 de R à $[0, +\infty[$ vérifie $\mathcal{L}(R_0) = U_0$.

b) Montrer que R est la solution de $(\mathcal{P})$ sur $\mathbb{R}$.