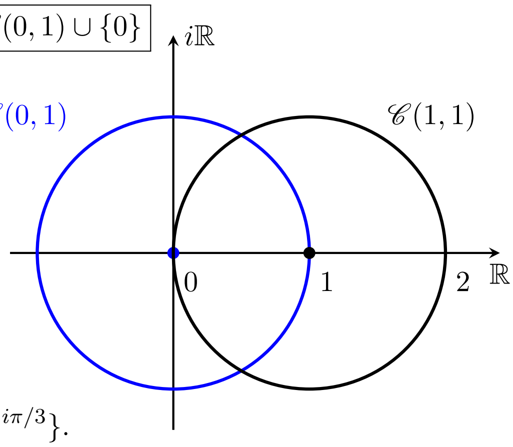
Devoir de Mathématiques numéro 3

Exercice 1 (oral 2013)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.
Si $P = c$ est un polynôme constant, alors l'équation s'écrit $c = c^2$ et les seules solutions sont $c = 0$ ou $c = 1$.
Supposons désormais $\deg P \geqslant 1$.
Notons $Z(P)$ l'ensemble des racines (complexes) de P.

- Soit $\alpha \in Z(P)$. Alors $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha+1) = 0$, donc α^2 est aussi une racine de P.
  Par récurrence, α^{2^n} est une racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Or P a un nombre fini de racines. Donc les α^{2^n} ne peuvent pas être des nombres tous distincts. Une des conséquences est que $|\alpha| = 1$ ou $\alpha = 0$.
  Si on note $\mathscr{C}(0,1)$ le cercle de centre 0 et de rayon 1, $\boxed{Z(P) \subset \mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}}$



- Soit $\alpha \in Z(P)$.
  Alors $P\Big((\alpha-1)^2\Big) = P(\alpha-1)P(\alpha) = 0$, donc $(\alpha-1)^2 \in Z(P)$.
  Or $Z(P) \subset \mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}$, donc $(\alpha-1)^2 \in \mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}$,
  c'est-à-dire $|\alpha - 1| = 1$ ou $(\alpha-1) = 0$.
  Ainsi, $\alpha \in \mathscr{C}(1,1)$ ou $\alpha = 1$.
  Par conséquent, $\boxed{Z(P) \subset \mathscr{C}(1,1) \cup \{1\}}$

- Ainsi, $\mathbb{Z}(P) \subset \Big(\mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}\Big) \cap \Big(\mathscr{C}(1,1) \cup \{1\}\Big) = \{0, 1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\}$.
  Si $\alpha = e^{i\pi/3}$, $\alpha^2 = e^{2i\pi/3} \notin Z(P)$, alors que d'après le premier point $\alpha^2 \in Z(P)$. Par conséquent $e^{i\pi/3}$ est à exclure, et de même $e^{-i\pi/3}$. Il reste donc :
  $$\boxed{Z(P) \subset \{0,1\}}$$

- D'après ci-dessus, les seules racines possibles de P sont 0 et 1.
  Donc $P(X) = cX^p(X-1)^q$ avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}^*$.
  L'équation fonctionnelle s'écrit donc :
  $$P(X^2) = cX^{2p}(X^2-1)^q = c^2X^p(X-1)^q(X+1)^pX^q = P(X)P(X+1)$$
  En décomposant $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, l'égalité précédente s'écrit :
  $$cX^{2p}(X-1)^q(X+1)^q = c^2X^{p+q}(X-1)^q(X+1)^p$$
  En identifiant (par unicité de la décomposition en facteurs $(X-\lambda)^\alpha$), il vient $c = 1$, $2p = p+q$, $q = q$ et $q = p$. Donc $P = X^p(X-1)^p$.
  Réciproquement, $P = X^p(X-1)^p$ vérifie $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Conclusion : $\boxed{\text{Les polynômes } P \text{ vérifiant } P(X^2) = P(X)P(X+1) \text{ sont } P = 0, \text{ et } P = X^p(X-1)^p \text{ avec } p \in \mathbb{N}.}$

C'est un exercice d'oral : vous aurez des indications et de l'aide de la part de l'examinateur.

Exercice 2

1) $M^2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = M$, donc $f^2 = f$. Conclusion $\boxed{f \text{ est un projecteur}}$

De plus $\mathrm{rg}\,(f) = \mathrm{Tr}\,(f) = \dfrac{1}{3}(1+2) = 1$.

Sans la trace, ce n'est pas beaucoup plus long : $\mathrm{Im}\ M = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix})$ donc $\mathrm{rg}\,(M) = 1$.

2) Soit on calcule (rapide), soit on raisonne :

- $\mathrm{rg}\,(f) = 1$ donc $\dim \mathrm{Im}\ f = 1$ donc (on cherche 1 vecteur non nul dans l'image, ça suffira)

$$\boxed{\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix})}$$

- Par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\ f = 1$ et on voit que $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})}$$

Exercice 3

1) La famille $\mathscr{B}'$ est une base de E si et seulement si $\det(\mathscr{B}') \neq 0$. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\det(\mathscr{B}') = \det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Conclusion : $\boxed{\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ est une base}}$

2) Comme ε_2 et $\varepsilon_3 \in \mathscr{P}$, et $\varepsilon_1 \in \mathscr{D}$, il vient

$$u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \qquad u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 \qquad u(\varepsilon_1) = 0$$

Ce qui nous donne

$$\begin{cases} u(e_1) - u(e_3) = e_1 - e_3 & (1) \\ 2u(e_1) - u(e_2) = 2e_1 - e_2 & (2) \\ u(e_1) + 3u(e_2) - u(e_3) = 0 & (3) \end{cases}$$

Ainsi (1) – (3) nous donne $-3u(e_2) = e_1 - e_3$, et $u(e_2) = \dfrac{1}{3}(-e_1 + e_3)$.

Puis (2) donne $2u(e_1) = 2e_1 - e_2 + u(e_2) = \dfrac{5}{3}e_1 - e_2 + \dfrac{1}{3}e_3$, donc $u(e_1) = \dfrac{1}{6}(5e_1 - 3e_2 + e_3)$.

Finalement (3) donne $u(e_3) = u(e_1) + 3u(e_2) = \dfrac{1}{6}(5e_1 - 3e_2 + e_3) - e_1 + e_3 = \dfrac{1}{6}(-e_1 - 3e_2 + 7e_3)$.

Donc la matrice est

$$\boxed{M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}}$$

Autre façon de faire, plus ou moins équivalente — seul le formalisme change : calculer M', P^{-1} puis appliquer la formule de changement de base.

3) Par définition, $u(\varepsilon_1) = 0$, $u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3$. Donc

$$\boxed{M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

et, d'après 1), $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$ puis $\boxed{M = PM'P^{-1}}$

Exercice 4 (D'après e3a PC 2017)

1) Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_0 =$ et $A_0 = U_0\,{}^tV_0$.

a) En bonus, une écriture par blocs :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} -U_0 & -U_0 & U_0 & -U_0 \end{array} \right) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Comme Im $A_0 = \text{Vect}\,(U_0)$ (l'image est engendrée par les vecteurs colonnes), et que $U_0 \neq 0$, Alors

$$\boxed{\text{rg } A_0 = 1}$$

b) Le théorème du rang s'écrit

$$\dim \text{Ker } A_0 = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Im } A_0 = 4 - 1 = 3$$

Donc $\boxed{\text{Ker } A_0 \neq \{0\}}$

Dès qu'on vous parle de noyau et d'image, et que vous êtes en dimension finie, toujours écrire le théorème du rang. Très souvent incontournable, toujours utile.

Déterminons le noyau : résolvons le système :

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A_0 &\iff A_0X = 0 \\
&\iff x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\
&\iff x_3 = x_1 + x_2 + x_4 \\
&\iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 + x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
&\iff X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\iff X \in \text{Vect}\,\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Conclusion : Ker $A = \text{Vect}\,\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$\boxed{\text{Une base de Ker } A : \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$$

Vérification : $\dim \operatorname{Ker} A = 3$.

c) **i)** $A_0U_0 = U_0{}^tV_0U_0 = ({}^tV_0U_0)U_0$. Or ${}^tV_0U_0 = -1+1-1-1 = -2$. Donc

$$\boxed{A_0U_0 = -2U_0 = \begin{pmatrix}-2\\2\\2\\-2\end{pmatrix}}$$

Comme $A_0U_0 \neq 0$, $\boxed{U_0 \notin \operatorname{Ker} A}$

ii) Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la famille suivante :

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad e_4 = U_0$$

Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de Ker A d'après 1b, elle est libre.
De plus, $e_4 \notin \operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ d'après 1ci, donc $\mathscr{B}$ est libre.
Or Card $\mathscr{B} = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
Dans la base $\mathscr{B}$, la nouvelle matrice de $f_{A_0} : X \mapsto A_0X$ sera :

$$\begin{aligned} f_{A_0}(e_1) &= 0 \\ f_{A_0}(e_2) &= 0 \\ f_{A_0}(e_3) &= 0 \\ f_{A_0}(e_4) &= A_0U_0 = -2e_4 \end{aligned} \qquad \operatorname{Mat}(f_{A_0}, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = D = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

Posons P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$. Alors

$$\boxed{P = \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\1&1&1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A_0 = PDP^{-1}}$$

L'esprit du sujet n'est pas de calculer un polynôme caractéristique, les valeurs propres etc... mais de raisonner à partir de ce que l'on a trouvé.

2) **a)** Comme rg $A = 1$, Im $A = \operatorname{Vect} U$, avec $U \neq 0$. De plus, Im A est engendré par les vecteurs colonnes. Donc $U = C$ convient – et existe : sinon, $A = 0$, et est de rang 0.
Comme Im $A = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \operatorname{Vect}(C)$, Les C_i appartiennent à $\operatorname{Vect}(C)$, et donc

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \ \exists \ell_j \in \mathbb{R} \qquad C_j = \ell_j C$$

En conclusion, $\boxed{\text{Il existe une matrice ligne non nulle } L = \begin{pmatrix}\ell_1 \cdots \ell_n\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \text{ telle que } A = CL}$

b) En notant c_i les coefficients du vecteur colonne C, par définition du produit matriciel, pour tout i, j, $a_{ij} = c_i\ell_j$. Donc

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} c_i\ell_i = LC$$

De plus $A^2 = CLCL = C(LC)L = (LC)CL$, par associativité du produit matriciel, LC étant une matrice 1×1, donc un scalaire que l'on peut sortir. Finalement,

$$\boxed{LC = \mathrm{Tr}\,(A)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{A^2 = \mathrm{Tr}\,(A)A}$$

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathbb{R}^n$ tels que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. Calculons A^2X de deux façons.

$$\begin{aligned} A^2X &= \mathrm{Tr}\,(A)AX \\ &= \mathrm{Tr}\,(A)\lambda X \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A^2X &= A(\lambda X) = \lambda AX \\ &= \lambda^2 X \end{aligned}$$

Donc $\left(\lambda^2 - \mathrm{Tr}\,(A)\lambda\right) X = \lambda^2 X - \mathrm{Tr}\,(A)\lambda X = 0$.

Comme $X \neq 0$, nous avons $\boxed{\lambda^2 - \mathrm{Tr}\,(A)\lambda = 0}$

Ainsi, $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A) \Longrightarrow \lambda$ solution de $\lambda^2 - \mathrm{Tr}\,(A)\lambda = 0$.

D'où l'inclusion $\boxed{\mathrm{Sp}\,(A) \subset \{0,\ \mathrm{Tr}\,(A)\}}$

d) $\dim \mathbb{R}^n = n \geqslant 2$, alors que $\mathrm{rg}\, A = 1$. Donc l'application linéaire $f_A \colon X \mapsto AX$, n'est pas surjective.
Or f_A est un endomorphisme en dimension finie : f_A n'est pas injective. Donc $\mathrm{Ker}\ A \neq \{0\}$.
Ainsi, $\exists X \neq 0$ tel que $AX = 0 = 0X$.
De plus, $\dim E_0 = \dim \mathrm{Ker}\ A = n - 1$ d'après le théorème du rang.

$$\boxed{\text{Le réel } 0 \text{ est valeur propre de } A \text{ et } \dim E_0 = n-1}$$

e) Montrons que $C \in E_{\mathrm{Tr}\,(A)}$: $C \neq 0$ par construction et

$$AC = CLC = (LC)C = \mathrm{Tr}\,(A)C$$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Tr}\,(A) \text{ est valeur propre de } A}$

f) Supposons $\mathrm{Tr}\,(A) \neq 0$:
Dans ce cas, $E_{\mathrm{Tr}\,(A)} \neq E_0$. De plus, $\dim E_{\mathrm{Tr}\,(A)} \geqslant 1$ car le sous-espace contient au moins $C \neq 0$.
Ainsi $\dim E_0 + \dim E_{\mathrm{Tr}\,(A)} = n - 1 + \dim E_{\mathrm{Tr}\,(A)} \geqslant n$.
Or $E_0 \oplus E_{\mathrm{Tr}\,(A)} \subset \mathbb{R}^n$ donc de dimension au plus n. Par conséquent, $\dim E_0 + \dim E_{\mathrm{Tr}\,(A)} = n$.
Donc, d'après le théorème de diagonalisation,

$$A \text{ est diagonalisable}$$

Supposons que A est diagonalisable :
Si $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$, alors la seule valeur propre est 0.
Comme A est diagonalisable, $A = PDP^{-1} = P0P^{-1} = 0$. Or $\mathrm{rg}\,(A) = 1$: $A \neq 0$. Par l'absurde,

$$\mathrm{Tr}\,(A) \neq 0$$

Conclusion : $\boxed{A \text{ est diagonalisable} \iff \mathrm{Tr}\,(A) \neq 0}$

3) **a)** *Il est toujours plus facile de raisonner avec des égalité plutôt que des inégalité. Tout comme est plus facile de raisonner avec $x \in A$ plutôt qu'avec $x \notin A$.*
Supposons que $f(u) = 0$. Alors

$$f^2(E) = f(f(E)) = f(\mathrm{Im}\ f) = f(\mathrm{Vect}\,(u)) = \{f(u)\} = \{0\}$$

Donc $f^2 = 0$. Or nous avons fait l'hypothèse inverse. Conclusion,

$$\boxed{f(u) \neq 0}$$

b) Comme $f(u) \in \mathrm{Im}\ f = \mathrm{Vect}\,(u)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$.
De plus, d'après 3a, $f(u) \neq 0$, donc $\lambda \neq 0$ et $u \neq 0$. En conclusion

$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ possède une valeur propre réelle } \lambda \text{ non nulle.}}$

c) Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre non nulle de f. Alors $\dim E_0 + \dim E_\lambda \geqslant n - 1 + 1 = n$.
Donc, de meme qu'en 2f, $\dim E_0 + \dim E_\lambda = n$ et

$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R}}$

On pouvait aussi appliquer les résultat du 2 en prenant une base, et en considérant la matrice A de u dans cette base. $f^2 \neq 0$ entraine $A^2 \neq 0$, or $A^2 = \mathrm{Tr}\,(A)A$ donc $\mathrm{Tr}\,(A) \neq 0$.