Devoir de Mathématiques numéro 3

Exercice 1 (oral 2013)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.
Indication : *On pourra regarder les racines de P. Si 0 et 1 sont les seules racines, comment s'écrit le polynôme P ?*

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de E fixée. On considère l'application linéaire f ayant pour matrice, dans la base $\mathscr{B}$,

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f est un projecteur. (Quel est son rang ?)

2) Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E fixée. Soit $\mathscr{D}$ la droite engendrée par $\varepsilon_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$ et $\mathscr{P}$ le plan engendré par les vecteurs $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\varepsilon_3 = 2e_1 - e_2$.

1) Montrer que $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base.

2) Déterminer la matrice M, dans la base $\mathscr{B}$, du projecteur u sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{D}$.

3) Donner la matrice M' de u dans $\mathscr{B}'$, la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, et la formule de changement de base.

Exercice 4

On rappelle que $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ où $(p,\ q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ et l'on identifiera $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

1) Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0\,{}^tV_0$.

- **a)** Calculer A_0. Quel est le rang de A_0 ?
- **b)** Justifier que Ker $A \neq \{0\}$ et en déterminer une base.
- **c)** **i)** Calculer A_0U_0. En déduire que $U_0 \notin$ Ker A.
  - **ii)** Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

2) Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

- **a)** On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne égale à la première colonne non nulle de A.

  Démontrer qu'il existe une matrice ligne non nulle $L = \begin{pmatrix} \ell_1 \cdots \ell_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = CL$.
- **b)** Vérifier que $LC = \mathrm{Tr}\,(A)$ puis montrer que $A^2 = \mathrm{Tr}\,(A)A$ où $\mathrm{Tr}\,(A)$ désigne la trace de A, somme des coefficients diagonaux de A.

c) Soit λ une valeur propre de la matrice A et X un vecteur propre associé : $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathbb{R}^n$ tels que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.
Montrer que $\left(\lambda^2 - \mathrm{Tr}\,(A)\lambda\right) X = 0$ et en déduire que l'ensemble $\mathrm{Sp}\,(A)$ des valeurs propres de A est inclus dans $\{0,\ \mathrm{Tr}\,(A)\}$.

d) Le réel 0 est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?

e) Vérifier que $\mathrm{Tr}\,(A)$ est valeur propre de A.

f) Montrer que : A est diagonalisable $\iff$ $\mathrm{Tr}\,(A) \neq 0$.

3) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}\,(f) = 1$ et $f \circ f \neq \widetilde{0}$ où $\widetilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul.
On désigne par u un vecteur de E tel que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(u)$.

a) Montrer que $f(u) \neq 0$.

b) En déduire que l'endomorphisme f possède une valeur propre réelle non nulle.

c) Montrer alors que f est un endomorphisme diagonalisable dans $\mathbb{R}$.