

Devoir de Mathématiques numéro 2

Exercice 1 (Fonction Zêta de Riemann)

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}.$$

On note D_ζ son ensemble de définition.
Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]1;\ +\infty[$ par :

$$\forall x\in]1;\ +\infty[,\qquad f_n(x)=\frac{1}{n^x}$$

1) Domaine de définition et continuité de ζ.

a) Montrer que $D_\zeta=]1,+\infty[$.

b) La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur D_ζ ?

c) Soit $a>1$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

d) Montrer que la fonction ζ est continue sur D_ζ.

2) Variations de ζ et conséquences.

a) Soit $f: I\to\mathbb{R}$, avec $I\subset\mathbb{R}$. Rappeler la définition de f décroissante sur I, et celle de f croissante sur I.

b) Étudier le sens de variations de ζ.

c) Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$.

3) Étude aux bornes.

a) **i)** Soit $x\in D_\zeta$ et soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x}\leqslant\frac{1}{n^x}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t^x}$.

ii) En déduire, que pour tout $x\in D_\zeta$,

$$1+\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}\leqslant\zeta(x)\leqslant 1+\frac{1}{x-1}.$$

b) Étude au voisinage de $x=1$.

i) Étudiez la limite de ζ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

ii) Déterminer un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

c) Étude au voisinage de $+\infty$: déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4) Fonction de Dirichlet. On pose :

$$\forall x\in]0;\ +\infty[,\qquad F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}f_n(x)$$

a) Montrer que la série $\sum(-1)^{n-1}f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que, pour tout $x>0$,

$$1-\frac{1}{2^x}\leqslant F(x)\leqslant 1-\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}$$

c) Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum(-1)^{n-1} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

d) En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

e) Montrer que :

$$\forall x \in]1,\ +\infty[, \qquad \zeta(x) - F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$$

5) Dérivabilité de ζ.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in D_\zeta,\ f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-\ln(n))^k}{n^x}$.

b) Soit $x > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_n \frac{(\ln n)^k}{n^x}$.

c) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^1$, et retrouver les variations de ζ obtenues plus haut.

d) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;\ +\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1;\ +\infty[$ sous forme d'une série.

Exercice 2 (Transformée de Laplace)

Ce problème étudie la transformation de Laplace d'une certaine catégorie de fonctions.
Notations :

- On note $\mathscr{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathscr{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs complexes.
  On admet que $\mathscr{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ et $\mathscr{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.
- Dans toute la suite, on considère l'ensemble E des fonctions f continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que, pour tout nombre réel p strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ converge. On admet que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1) Si $f \in E$, on note $F : p \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$, fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Démontrer que l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{L} :\ E &\to \mathscr{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})\\ f &\mapsto F\end{aligned}$$

est linéaire.

L'application $\mathcal{L}$ s'appelle la transformation de Laplace, et, pour tout $f \in E$, $F = \mathcal{L}(f)$ s'appelle la transformée de Laplace de f.
Toutes les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}^+$.

2) Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction : $t \mapsto t^n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in E$
On note alors $F_n = \mathcal{L}(f_n)$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout réel p strictement positif, une relation entre $F_n(p)$ et $F_{n-1}(p)$.

4) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout réel p strictement positif,

$$F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

5) Pour tout nombre réel a positif ou nul et tout nombre réel b, on note $f_{a,b}$ la fonction $t \mapsto e^{-at+ibt}$.
Montrer que $f_{a,b} \in E$ et calculer $F_{a,b} = \mathcal{L}(f_{a,b})$.

6) En déduire que les fonctions $g_{a,b} : t \mapsto e^{-at}\cos(bt)$ et $h_{a,b} : t \mapsto e^{-at}\sin(bt)$ appartiennent à E et calculer leurs transformées de Laplace $G_{a,b} = \mathcal{L}(g_{a,b})$ et $H_{a,b} = \mathcal{L}(h_{a,b})$.

7) Plus généralement, montrer que toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, appartient à E.

8) Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ n'appartenant pas à E.

9) Transformées de Laplace d'une dérivée. Supposons que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, que $f \in E$, que $f' \in E$ et que pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-pt} = 0$.

À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0)$$