Devoir de Mathématiques numéro 2

Correction

Exercice 1 (D'après E3A PC)

Les fonctions f de E vérifient :

$$\exists A > 0 \quad \exists C > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} / \qquad \forall t \geqslant A, \qquad |f(t)| \leqslant Ct^n$$

En particulier : elles ne sont pas forcément bornée ($t \mapsto t^2 \in E$) et la majoration n'est valable que si $t \geqslant A$. Lorsqu'on veut montrer qu'une fonction f appartient à E, il faut **expliciter** A, C et n, expliquer lesquels on choisit (question 1.2).
On pouvait aussi remarquer que les fonctions f de E vérifient exactement

$$\exists n \in \mathbb{N} / \qquad f(t) = O_{+\infty}(t^n)$$

Partie 1 (La transformation de Laplace)

1) a) Soit $x > 0$ fixé. La fonction $t \mapsto e^{-xt}$ est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $A > 0$,

$$\int_0^A e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^A = \frac{1}{x} - \frac{e^{-xA}}{-x}$$

Donc $\boxed{\text{l'intégrale } I_0(x) \text{ est convergente et } I_0(x) = \frac{1}{x}.}$

b) Soit $x > 0$ fixé. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, $t \mapsto t^n e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ car composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$. De plus $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 t^n e^{-xt} = 0$ par croissance comparée donc,

$$t^n e^{-xt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Or $\frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (Riemann $\alpha = 2$), donc $\boxed{I_n(x) \text{ converge.}}$
Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie d'après la question 1)a).
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. L'intégrale $I_{n+1}(x)$ converge d'après ci-dessus.

  Intégrons par parties : par croissance comparée $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n+1} \times \frac{e^{-xt}}{-x} = 0$. Donc, d'après le théorème d'intégration par partie,

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x) &= \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t^{n+1} \times \frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (n+1)t^n \frac{e^{-xt}}{-x}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{n+1}{x} I_n(x) \end{aligned}$$

De plus, d'après $\mathcal{H}(n)$, $I_n(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$. Par conséquent

$$I_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} \times \frac{n!}{x^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$$

- Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0,\ I_n(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}.}$

2) **a)** Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$:

- Pour tout $t \geqslant 1$, $|0| \leqslant 1$ donc $0 \in E$ avec $A = 1$, $C = 1$ et $n = 0$. Ainsi $E \neq \emptyset$. *(Important !)*
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f_1, f_2 \in E^2$, avec A_1, A_2, C_1, C_2, n_1 et n_2 les constantes associées.
  Posons ▷ $A = \max(A_1, A_2, 1) > 0$
  ▷ $C = |\lambda|C_1 + C_2 > 0$
  ▷ $n = \max(n_1, n_2)$
  Pour tout $t \geqslant A = \max(A_1, A_2, 1)$,

$$|\lambda f_1(t) + f_2(t)| \leqslant |\lambda||f_1(t)| + |f_2(t)| \leqslant |\lambda|C_1 t^{n_1} + C_2 t^{n_2} \leqslant |\lambda|C_1 t^n + C_2 t^n \leqslant Ct^n$$

  De plus $\lambda f_1 + f_2$ est continue. Ainsi $\lambda f_1 + f_2 \in E$.

Par conséquent $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R}).}$

b) Soit f une fonction continue et bornée sur $[0,+\infty[$. Notons $M = \sup\limits_{[1,+\infty[} |f|$ et $C = M + 1 > 0$.
Alors, pour tout $t \geqslant 1$, $|f(t)| \leqslant Ct^0$. Donc $\boxed{f \in E.}$ $(C = M+1,\ A = 1 \text{ et } n = 0)$

c) Soit f une fonction polynomiale de degré n.
La fonction $g : t \mapsto f(t)/t^n$ est continue sur $[1,+\infty[$ et a une limite finie en $+\infty$ donc est bornée sur $[1,+\infty[$. Notons $C = \sup\limits_{[1,+\infty[} |g| + 1 > 0$. Par définition, pour tout $t \geqslant 1$, $|g(t)| \leqslant C$.
Alors, pour tout $t \geqslant 1$, $|f(t)| \leqslant Ct^n$. Donc $\boxed{f \in E.}$ $(C = \sup\limits_{[1,+\infty[} |g| + 1,\ A = 1 \text{ et } n = \deg f)$
Autre preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^n$ appartient à E ($A = 1$, $C = 1$, $n = n$).
De plus, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (1)2)a)), donc $\operatorname{Vect}(1, t, \dots, t^n, \dots) \subset E$, c'est-à-dire

$$\boxed{\textit{L'ensemble des fonctions polynomiales appartient } E.}$$

3) **a)** Soit x un réel strictement positif.
La fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
Soit $A > 0$, $C > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\forall t \geqslant A$, $|f(t) \leqslant Ct^n$. Ainsi,

$$\forall t \geqslant A \qquad |t^2 f(t)e^{-xt}| \leqslant Ct^{n+2}e^{-xt} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \text{(croissance comparée, } x > 0)$$

Donc, $|f(t)e^{-xt}| = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Or $\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après Riemann.
En conclusion, par comparaison,

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto f(t)e^{-xt} \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[.}$$

b) On fixe un réel $a > 0$. Appliquons le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre sur l'intervalle $[a,+\infty[$.

- Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $[a,+\infty[$ car exponentielle l'est.
- Pour tout $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- La fonction $\varphi(t) = |f(t)|e^{-at}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ d'après 3)a) et

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[\qquad |f(t)e^{-xt}| \leqslant \varphi(t)$$

(La majoration doit être vraie « pour tout t dans le domaine d'intégration », et pas — par exemple — juste pour $t \geqslant A$)

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme,

$$\boxed{\text{la fonction } \mathcal{L}(f) \text{ est définie et continue sur } [a, +\infty[.}$$

Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. Posons $a = x/2$, alors $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $[a, +\infty[= [x/2, +\infty[$ qui contient x, donc $\mathcal{L}(f)$ est continue en x. Ainsi $\mathcal{L}(f)$ est continue en x pour tout $x > 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathcal{L}(f) \text{ est continue sur }]0, +\infty[.}$$

4) D'après 3)c), pour tout $f \in E$, $\mathcal{L}(f)$ existe et est une fonction définie définies et continues sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles. De plus, par linéarité de l'intégrale,

$$\forall (f, g) \in E^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{L}(f + \lambda g) = \mathcal{L}(f) + \lambda \mathcal{L}(g)$$

En conclusion, $\boxed{\text{La transformée de Laplace est une application linéaire de } E \text{ dans } \mathscr{C}^0(]0, +\infty[, \mathbb{R}).}$

Partie 2 (Quelques propriétés des transformées de Laplace)

1) Appliquons le théorème de convergence dominée à paramètre continu lorsque $x \to +\infty$.
Soit $a > 0$.

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(t)e^{-xt} = 0$.
- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, de même que la fonction nulle sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $\varphi(t) = |f(t)|e^{-at}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après 3)a) et

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[\qquad |f(t)e^{-xt}| \leqslant \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \mathcal{L}(f) = 0}$$

2) On fixe un réel $a > 0$. Appliquons le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Posons $h(x, t) = f(t)e^{-xt}$ pour $(x, t) \in [a, +\infty[\times\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x, t) = f(t)e^{-xt}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$,
- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est **intégrable** sur $\mathbb{R}_+$ d'après 3)a),
  la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -tf(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction $\varphi : t \mapsto t|f(t)|e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (de même qu'en 1)3)a) $= o(1/t^2)$) et

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times\mathbb{R}_+ \qquad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = |tf(t)e^{-xt}| \leqslant \varphi(t)$$

(Les remarques de la question 1)3)c) restent valables. De plus, l'hypothèse $t \mapsto h(x, t)$ **intégrable** *doit être présente !)*

Donc, d'après le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme,

$$\text{la fonction } \mathcal{L}(f) \text{ est } C^1 \text{ sur } [a, +\infty[\text{ et } (\mathcal{L}(f))'(x) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}\, \mathrm{d}t.$$

$\mathcal{L}(f)$ est donc C^1 sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc elle est C^1 sur la réunion de ces intervalles, c'est-à-dire sur $]0, +\infty[$.

De plus, on a toujours, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\boxed{(\mathcal{L}(f))'(x) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}\, \mathrm{d}t}$$

3) **a)** Effectuons une intégration par parties. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. Pour tout $T > 0$,

$$\int_0^T f'(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)e^{-xt}\Big]_0^T - \int_0^T f(t)(-xe^{-xt})\,\mathrm{d}t = f(T)e^{-xT} - f(0) + x\int_0^T f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Or $\lim\limits_{T\to+\infty} f(T)e^{-xT} = 0$. Ainsi, en prenant la limite lorsque $T \to +\infty$,

$$\boxed{\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)}$$

On peut aussi appliquer le théorème d'intégration par partie, évidemment.

b) Soit $A > 0$, $C > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ qui conviennent pour f' ($f' \in E$ par hypothèse). Alors

$$\forall t \geqslant A \qquad |tf'(t)| \leqslant Ct^{n+1}$$

Donc $A_h = A$, $C_h = C$ et $n_h = n + 1$ conviennent, et $\boxed{h \in E}$

(Attention ! Dériver une inégalité est une **abomination***. exemple : $|\sin t| \leqslant 1$ et pourtant $\cos t \neq 0$.*
Voir pire : $|\sin(e^t)| \leqslant 1$ (donc dans E) et sa dérivée ($t \mapsto e^t\cos(e^t)$) n'est pas dans E)

Montrons l'égalité : effectuons une intégration par parties. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. Pour tout $T > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^T tf'(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t &= \Big[f(t)te^{-xt}\Big]_0^T - \int_0^T f(t)(e^{-xt} - xte^{-xt})\,\mathrm{d}t \\ &= f(T)Te^{-xT} - \int_0^T f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t + x\int_0^T tf(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{T\to+\infty} f(T)Te^{-xT} = 0$, et on reconnaît $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = -(\mathcal{L}(f))'(x)$.
Ainsi, en prenant la limite lorsque $T \to +\infty$,

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad \mathcal{L}(h)(x) = -\mathcal{L}(f)(x) - x(\mathcal{L}(f))'(x)}$$

Autre méthode pour l'égalité : Plus d'abstraction et moins de calculs. Soit $g(t) = tf(t)$.
Avec $A_g = A_f$, $C_g = C_f$ et $n_g = n_f + 1$, on a $g \in E$. De plus, g est de classe $\mathscr{C}^1$ (comme produit de $\mathscr{C}^1$), et

$$g'(t) = f(t) + tf'(t) = f(t) + h(t)$$

Or $f \in E$ et $h \in E$ donc, comme E est un espace vectoriel, $g' \in E$.
Nous sommes donc dans les hypothèse de la question 3)b) ci-dessus :

$$\forall x \in]0, +\infty[\qquad \mathcal{L}(g')(x) = x\mathcal{L}(g)(x) - g(0)$$

Par linéarité de $\mathcal{L}$ (question 1)4)), $\mathcal{L}(g') = \mathcal{L}(f + h) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(h)$.
De plus $\mathcal{L}(g) = -(\mathcal{L}(f))'$ d'après 2)b), et $g(0) = 0$. Donc finalement, en remplaçant,

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad \mathcal{L}(h)(x) = -\mathcal{L}(f)(x) - x(\mathcal{L}(f))'(x)}$$

c) On se contente d'appliquer 2)3)a) deux fois (d'abord à f') :

$$\boxed{\mathcal{L}(f'') = x\mathcal{L}(f') - f'(0) = x^2\mathcal{L}(f) - xf(0) - f'(0)}$$

Partie 3 (Une application de la transformation de Laplace)

1) Partons de ce que l'on sait :

$$f'' - tf' + 2pf = 0$$

Les fonctions f, f' et f'' appartiennent à E, donc $h : t \mapsto tf'(t) \in E$ (d'après 2)3)b)) et l'application $\mathcal{L}$ est linéaire, donc on trouve

$$\mathcal{L}(f'' - tf' + 2pf) = \mathcal{L}(f'') - \mathcal{L}(tf') + 2p\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(0) = 0$$

Or, d'après 2)3)b) et c) on sait que

$$\mathcal{L}(f'') = x^2\mathcal{L}(f) - xf(0) - f'(0) = x^2\mathcal{L}(f) - x \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}(tf') = \mathcal{L}(h) = -\mathcal{L}(f) - x(\mathcal{L}(f))'$$

avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. On a posé $U = \mathcal{L}(f)$, donc il vient

$$\forall x > 0 \qquad x^2U(x) - x - (-U(x) - xU'(x)) + 2pU(x) = 0$$

En divisant par $x > 0$ et en réarrangeant, il nous reste

$$U'(x) + \left(x + \frac{2p+1}{x}\right)U(x) = 1$$

Ainsi $\boxed{U \text{ est une solution de } (J) \text{ sur }]0, +\infty[.}$

2) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration par parties

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^x t^{2n+1}e^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2}e^{\frac{t^2}{2}}\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{2n+2}te^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^{2n+2}}{2n+2}e^{\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{2n+2}\int_0^x t^{2n+3}e^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{2n+2}}{2n+2}e^{\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{2n+2}f_{n+1}(x) \end{aligned}$$

En conclusion : $\boxed{f_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{2n+2}e^{\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{2n+2}f_{n+1}(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}(n): \quad f_n(x) = (-1)^{n+1}2^n n! + n!e^{\frac{x^2}{2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k}{(n-k)!}x^{2n-2k}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $f_0(x) = \int_0^x te^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[e^{\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = e^{\frac{x^2}{2}} - 1 = (-1)^1 2^0 0! + 0!e^{\frac{x^2}{2}}(-1)^0x^0$ Donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$f_n(x) = (-1)^{n+1}2^n n! + n!e^{\frac{x^2}{2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k}{(n-k)!}x^{2n-2k}$$

Calculons $f_{n+1}(x)$ à l'aide de la formule du 2)a) :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= x^{2n+2}e^{\frac{x^2}{2}} - (2n+2)f_n(x) \\ &= x^{2n+2}e^{\frac{x^2}{2}} - 2(n+1)\left((-1)^{n+1}2^n n! + n!e^{\frac{x^2}{2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k}{(n-k)!}x^{2n-2k}\right) \\ &= x^{2n+2}e^{\frac{x^2}{2}} + (-1)^{n+2}2^{n+1}(n+1)! + (n+1)!e^{\frac{x^2}{2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2^{k+1}}{(n-k)!}x^{2n-2k} \\ &= (-1)^{n+2}2^{n+1}(n+1)! + (n+1)!e^{\frac{x^2}{2}}\frac{(-1)^0 2^0}{(n+1)!}x^{2n+2-0} \\ &\qquad +(n+1)!e^{\frac{x^2}{2}}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\frac{2^k}{(n-k+1)!}x^{2n-2k+2} \\ &= (-1)^{n+2}2^{n+1}(n+1)! + (n+1)!e^{\frac{x^2}{2}}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\frac{2^k}{((n+1)-k)!}x^{2(n+1)-2k} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad f_n(x) = (-1)^{n+1}2^n n! + n!e^{\frac{x^2}{2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k}{(n-k)!}x^{2n-2k}}$

3) **a)** C'est une équation différentielle de la forme $u' = a(x)u$, les solutions sont donc de la forme $u(x) = C\exp(A(x))$ avec A une primitive de a et $C \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$u(x) = C\exp - \left(\frac{x^2}{2} + (2p+1)\ln x\right) = C\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+1}}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Une base de l'espace des solutions de } (J') \text{ est } \widetilde{u}(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+1}}.}$

Les solutions sont de la forme Cu, donc l'ensemble des solution est $\mathrm{Vect}\,(u)$.

b) On note U_0 la fonction u correspondant à $C = 0$. On vérifie que U_0 est solution de (J) en injectant l'expression de U_0 dans (J). *(preuve laissée au lecteur — dans une copie il faut bien sûr faire le calcul)*

L'ensemble des solutions de (J) est l'espace affine constitué des fonctions $U_0 + C\widetilde{u}$ où U_0 est une solution particulière de l'équation avec second membre et $\widetilde{u}$ une base des solutions de l'équation homogène.

Donc l'ensemble des solutions de (J) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ est constitué des fonctions de la forme

$$u(x) = C\widetilde{u}(x) + U_0(x) = C\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+1}} + p!\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{2^k}{(p-k)!}\frac{1}{x^{2k+1}}$$

où C est un réel quelconque.

4) **a)** D'après 1)1)b), si on note M_n la restriction à $[0, +\infty[$ du monôme $t \mapsto t^n$, on a $\mathcal{L}(M_n) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$. Ainsi, par combinaison linéaire, il vient

$$U_0(x) = p!\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{2^k}{(p-k)!}\frac{1}{x^{2k+1}} = p!\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k 2^k}{(p-k)!(2k)!}\frac{(2k)!}{x^{2k+1}} = p!\sum_{k=0}^{p}\frac{(-2)^k}{(p-k)!(2k)!}\mathcal{L}(M_{2k})$$

$$\boxed{\text{En posant } R(X) = p!\sum_{k=0}^{p}\frac{(-2)^k}{(p-k)!(2k)!}X^{2k}, \text{ il vient } \mathcal{L}(R_0) = U_0.}$$

b) On calcule $R'' - XR' + 2pR$ et on trouve 0, de plus $R'(0) = 0$ et $R(0) = 1$. Donc, comme on a admis l'unicité de la solution de $(\mathcal{P})$,

$$\boxed{R \text{ est la solution de } (\mathcal{P}) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Exercice 2 (Théorème de Stone-Weierstrass – d'après Mines-Ponts PSI 2019)

1) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}}$$

2) Soit $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1}$$

3) On dérive par rapport à $x \in \mathbb{R}$ et à $y \in \mathbb{R}$ fixé la formule du binôme (écrite au 1) :

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}y^{n-k}$$

Puis on multiplie par x :

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \tag{1}$$

Soit $x \in [0,1]$ et en posant $y = 1-x$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx}$$

4) On reprend la formule (1), et on dérive de nouveau par rapport à x puis on multiplie par x :

$$nx(x+y)^{n-1} + n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

Ainsi, de même, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2}$$

5) Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\left(k^2 - 2knx + n^2x^2\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&+ \sum_{k=0}^{n} -2knx\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&+ \sum_{k=0}^{n} n^2x^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

Or, d'après 4, 3 et 2

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= nx + n(n-1)x^2 = nx + n^2x^2 - nx^2 \\
\sum_{k=0}^{n} -2knx\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= -2nx\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= -2(nx)^2 \\
\sum_{k=0}^{n} n^2x^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= n^2x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= n^2x^2
\end{aligned}$$

Ainsi, en sommant,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= nx + n^2x^2 - nx^2 - 2n^2x^2 + n^2x^2 \\
&= n(x-x^2)
\end{aligned}$$

Posons $h(x) = x - x^2$ pour tout $x \in [0,1]$, et calculons $\|h\|_\infty$: $h'(x) = 1 - 2x$ et

x	0		$1/2$		1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Donc $\|h\|_\infty = \dfrac{1}{4}$.

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, $x - x^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$. Par conséquent,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}}$$

6) *La propriété donnée par l'énoncé s'appelle l'uniforme continuité et toute fonction continue sur un segment est automatiquement uniformément continue. Cette propriété sert lors de la construction de l'intégrale d'une fonction continue à partir des fonctions en escalier.*

Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après 2, en multipliant par $f(x)$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f(x)$$

De plus, par définition de $B_n(x)$,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Donc en soustrayant, l'inégalité triangulaire nous donne

$$\boxed{|B_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|}$$

7) Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Par construction $[\![0,n]\!] = X \cup Y$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| &= \sum_{k\in X}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \\ &\quad + \sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|\end{aligned}$$

<u>Somme sur X</u> : Soit $k \in X$.

Par construction de X, $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| < \alpha$ Comme f est uniformément continue (propriété (1) de l'énoncé), $\left|f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right| < \varepsilon$.

Puis, en combinant (tous les coefficients sont positifs) :

$$\begin{aligned}\sum_{k\in X}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| &\leqslant \sum_{k\in X}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\varepsilon \\ &\leqslant \varepsilon\sum_{k\in[\![0,n]\!]}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \varepsilon\end{aligned}$$

<u>Somme sur Y</u> : Soit $k \in Y$. $\left|f\left(\dfrac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant \left|f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right| + |f(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty$.

En conclusion,

$$\boxed{|B_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}$$

8) Si $k \in Y$, par définition, $1 \leqslant \dfrac{1}{\alpha}\left|x-\dfrac{k}{n}\right|$, puis $1 \leqslant \dfrac{1}{\alpha^2}\left(x-\dfrac{k}{n}\right)^2$. Donc

$$\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \sum_{k\in Y}\frac{1}{\alpha^2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{1}{\alpha^2 n^2}\sum_{k\in Y}(nx-k)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\alpha^2 n^2}\sum_{k\in Y}(nx-k)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}$$

9) On suppose $f \neq 0$, donc $\|f\|_\infty \neq 0$.
D'après la question 5,

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}$$

Comme les termes de la somme sont positifs,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &\leqslant \frac{1}{\alpha^2 n^2}\sum_{k\in Y}(nx-k)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\leqslant \frac{1}{\alpha^2 n^2}\sum_{k\in[\![0,n]\!]}(nx-k)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\leqslant \frac{1}{\alpha^2 n^2}\times\frac{n}{4} = \frac{1}{4\alpha^2 n}\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4\alpha^2 n} = 0$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{1}{4\alpha^2 n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}$.
En utilisant cette majoration dans l'inégalité trouvée à la question 7, il vient

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant n_0,\ \forall x\in[0,1],\qquad |B_n(x)-f(x)| &\leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty\times\frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty} = 2\varepsilon\end{aligned}$$

Cette majoration étant vraie pour tout $x \in [0,1]$, on peut passer au sup :

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0,\quad \|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon}$$

10) Si $f = 0$, la suite constante égale à 0 est une suite de fonctions polynomiales qui convergent uniformément vers f.
Si $f \neq 0$, on construit les (B_n), fonctions polynomiales, comme ci-dessus. On vient de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\quad \|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$$

c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|B_n - f\|_\infty = 0$. Conclusion :

$$\boxed{\text{Toute fonction continue sur } [0,1] \text{ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales}}$$

Si on considère l'espace vectoriel $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on peut le munir d'une distance à l'aide de la norme infinie : la distance entre f et g est $\|f-g\|_\infty$. On vient de montrer que les fonctions polynomiales sont arbitrairement proches de toutes les fonctions continues. On dit que les fonctions polynomiales sont « denses » dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$.
Ce résultat permet de montrer certains résultats en passant par les polynômes, puis en les « passant à la limite ».