

Devoir de Mathématiques numéro 2

Exercice 1 (Fonction Zêta de Riemann – d’après Centrale PC 2018, E3A PC 2017)

C’est un sujet extrêmement classique, et donc une fonction à connaître.

1) Domaine de définition et continuité de ζ .

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$ (Séries de Riemann). Donc

$$D_\zeta =]1, +\infty[$$

On vient donc de montrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur D_ζ .

b) Calcul de $\|f_n\|_\infty$: Pour tout $n \geq 1$ et tout $x > 1$, $f_n(x) = e^{-x \ln n}$, d’où le tableau de variations :

x	1	$+\infty$
$f'_n(x)$		-
f_n	$\frac{1}{n}$	0

Donc $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$.

Conclusion : Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge (d’après Riemann, $\alpha = 1$), $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge et

$$\sum f_n \text{ ne converge pas normalement sur } D_\zeta$$

c) *Sur votre copie, vous ne faites pas un second tableau de variations : vous rajoutez a et $f_n(a)$ dans le tableau précédent.*

Calcul de $\|f_n\|_\infty$: Calculons $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)|$ à l’aide du tableau de variations précédent :

x	1	a	$+\infty$
$f'_n(x)$		-	
f_n	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^a}$	0

Donc $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^a}$.

Or $\sum \frac{1}{n^a}$ converge (d’après Riemann, $a > 1$).

Donc $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Conclusion :

$$\sum f_n \text{ converge normalement sur } [a, +\infty[$$

d) D'après 1c, $\sum f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ de D_ζ avec $a > 1$, donc sur tout segment de D_ζ .

Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de D_ζ .

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur D_ζ .

Donc, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions,

La fonction ζ est continue sur D_ζ

2) Variations de ζ .

a) Une fonction f est dite croissante sur I si et seulement si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

Une fonction f est dite décroissante sur I si et seulement si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$

b) Soit $(x, y) \in D_\zeta^2$, tels que $x \leq y$. Comme f_n est décroissante (cf 1b) pour tout $n \geq 1$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) \geq f_n(y)$$

En sommant et en passant à la limite, il vient,

$$\zeta(x) \geq \zeta(y)$$

D'où

La fonction ζ est décroissante sur D_ζ

c) La fonction ζ est positive car $f_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Or elle est décroissante d'après 2b, donc

ζ admet une limite en $+\infty$

3) Étude aux bornes.

a) i) Soit $n \geq 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n, n+1[$, car $x > 0$, donc

$$\forall t \in [n, n+1[, \quad \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

D'où, par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

Pour $n \geq 2$, l'inégalité de gauche peut s'écrire

$$\frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}$$

D'où

$$\forall n \geq 2, \quad \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}$$

Ici, on fait le décalage d'indices avant de sommer.

ii) Soit $x \in D_\zeta$.

D'après Riemann ($x > 1$), $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$ converge et, de plus, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}$.

D'après Chasles,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}$$

En intégrant à partir de $t = 2$, on trouve $\sum_{n=2}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{(x-1)2^{x-1}}$.

En sommant l'encadrement de la question 3(a)i entre 2 et N , il vient

$$\forall N \geq 2, \quad \sum_{n=2}^N \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}$$

Toutes ces sommes convergent d'après ci-dessus, ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x} \\ \implies \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} &\leq \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in D_\zeta, \quad 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}}$$

b) Étude au voisinage de $x = 1$.

i) Comme $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} = +\infty$, par minoration (3(a)ii),

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) \text{ existe et vaut } +\infty}$$

ii) Utilisons l'encadrement de la question 3(a)ii : comme $x - 1 > 0$,

$$\forall x \in D_\zeta, \quad x - 1 + \frac{1}{2^{x-1}} \leq (x-1)\zeta(x) \leq x$$

Or $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 + \frac{1}{2^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$. Donc, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)\zeta(x) = 1$.

Conclusion :

$$\boxed{\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}}$$

c) D'après l'encadrement de la question 3(a)ii, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1}$$

4) Fonction de Dirichlet.

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La suite (a_n) définie par $a_n = \frac{1}{n^x}$ est positive, décroissante et de limite nulle ($x > 0$).

Donc, d'après le critère des séries alternées, $\sum (-1)^{n-1} a_n$ converge.

$$\boxed{\text{La série } \sum (-1)^{n-1} f_n \text{ converge simplement sur }]0, +\infty[.}$$

- b) Soit $x > 0$. D'après le critère des séries alternées, la limite $\ell = F(x)$ est encadrée entre U_{2n} et U_{2n+1} , où $U_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$.

Pour $n = 1$, il vient

$$U_2 \leq F(x) \leq U_3$$

C'est-à-dire

$$\boxed{1 - \frac{1}{2^x} \leq F(x) \leq 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}}$$

- c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

D'après le critère des séries alternées, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ est majoré, en valeur absolue, par le premier terme négligé, a_{n+1} :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, +\infty[, \quad & \left| \zeta(x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} f_k(x) \right| = |R_n| \leq f_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)^x} \\ \implies \forall x \in [a, +\infty[, \quad & \left| \zeta(x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} f_k(x) \right| \leq \frac{1}{(n+1)^a} \quad (\text{par décroissance de } f_{n+1}) \\ \implies & \left\| \zeta - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} f_k \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{(n+1)^a} \quad (\text{en passant au sup}) \end{aligned}$$

Conclusion : Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)^a} = 0$ ($a > 0$), par majoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \zeta - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} f_k \right\|_{\infty} = 0$ et

$$\boxed{\sum (-1)^{n-1} f_n \text{ converge uniformément sur } [a, +\infty[}$$

On a convergence normale pour $a > 1$, mais pour $a \in]0, 1[$ il n'y a pas convergence normale, cf 1b et 1c.

- d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^{n-1} f_n$ est continue (car f_n l'est) sur $[a, +\infty[$, et $\sum (-1)^{n-1} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, donc d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, F est continue sur $[a, +\infty[$.

Ceci est valable pour tout $a > 0$, donc sur $\bigcup_{a>0} [a, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$$

C'est une autre façon de rédiger la question. On pouvait évidemment rédiger comme au 1d, et vice-versa.

- e) Soit $x > 1$,

$$\begin{aligned} \zeta(x) - F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^x} \quad \text{Or } \begin{cases} 1 + (-1)^n = 0 & \text{si } n = 2k + 1 \text{ impair} \\ 1 + (-1)^n = 2 & \text{si } n = 2k \text{ pair} \end{cases} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k)^x} \\ &= \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in]1, +\infty[, \quad \zeta(x) - F(x) = 2^{1-x} \zeta(x)}$$

f) D'après la question précédente, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} (1 - 2^{1-x})\zeta(x) &= F(x) \\ \implies \zeta(x) &= \frac{1}{1 - 2^{1-x}} F(x) \\ &= (1 + 2^{1-x} + o(2^{1-x}))F(x) \quad (\text{car } \frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u) \text{ et } 2^{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0) \end{aligned}$$

Or, d'après 4b,

$$0 \leq 2^x \left[F(x) - \left(1 - \frac{1}{2^x} \right) \right] \leq \left(\frac{2}{3} \right)^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Donc, par encadrement, $2^x \left[F(x) - \left(1 - \frac{1}{2^x} \right) \right] = o(1)$, puis

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= (1 + 2^{1-x} + o(2^{1-x}))F(x) \\ &= \left(1 + \frac{2}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right) \right) \left(1 - \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right) \right) \quad (\text{car } 2^{1-x} = \frac{1}{2^{x-1}} = 2 \times \frac{1}{2^x}) \\ &= 1 + \frac{2}{2^x} - \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right) \end{aligned}$$

Conclusion : au voisinage de $+\infty$,

$$\boxed{\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)}$$

5) Dérivabilité de ζ .

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in D_\zeta$, $f_n(x) = n^{-x} = e^{-(\ln n)x}$ donc f_n est \mathcal{C}^∞ sur D_ζ et

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1; +\infty[, \quad f_n^{(k)}(x) = (-\ln n)^k e^{-(\ln n)x} = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}}$$

b) Question de cours. Soit $x > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$ et $\alpha = \frac{x+1}{2} > 1$.

$$\begin{aligned} n^\alpha |u_n| &= (\ln n)^k n^{\alpha-x} && \text{Or } \alpha - x = \frac{1-x}{2} < 0 \\ &= (\ln n)^k n^{\frac{1-x}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 && \text{par croissance comparée} \end{aligned}$$

Donc $n^\alpha |u_n| = o(1)$, puis $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. Or $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge (Riemann, $\alpha > 1$).

Donc par théorème de comparaison, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

$$\boxed{\text{La série } \sum_n \frac{(-\ln n)^k}{n^x} \text{ est convergente}}$$

c) Lors d'une question « à tiroirs » de ce type, il faut bien structurer sa réponse. Ici, vous allez appliquer le théorème de dérivation terme à terme. Pour ça, vous avez besoin de la convergence uniforme de la série des dérivées, qui n'a pas été montrée plus haut. Pour ça, vous allez sans doute montrer la convergence normale de $\sum f'_n \dots$
Structurez!

- Convergence normale de $\sum f'_n$ sur $[a, +\infty[$: Soit $a > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad |f'_n(x)| = \frac{\ln n}{n^x}$$

Donc, d'après l'étude effectuée au 1c, $\|f'_n\|_\infty = \frac{\ln n}{n^a}$.

Or, d'après 5b avec $k = 1$, $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge, donc

$$\sum f'_n \text{ converge normalement sur } [a, +\infty[$$

- Convergence uniforme de $\sum f'_n$ sur tout segment de $]1, +\infty[$: Soit $1 < a < b$.

D'après ci-dessus, $\sum f'_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, donc normalement sur $[a, b]$, donc uniformément sur $[a, b]$.

Ainsi, $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de $]1, +\infty[$.

- Théorème de dérivation terme à terme :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur D_ζ .
- $\sum f_n$ converge simplement vers ζ sur D_ζ d'après 1)a).
- $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de D_ζ d'après ci-dessus.

Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions,

La fonction ζ est de classe \mathcal{C}^1 sur D_ζ et $\forall x \in D_\zeta$, $\zeta'(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}$

- Variations de ζ sur D_ζ : $\forall x \in D_\zeta$, $\zeta'(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} < 0$ donc

ζ est décroissante sur D_ζ

d) Montrons que ζ est de classe \mathcal{C}^k sur D_ζ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par la même méthode qu'à la question précédente. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Convergence normale de $\sum f_n^{(k)}$ sur $[a, +\infty[$: Soit $a > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, d'après a),

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad |f_n^{(k)}(x)| = \frac{(\ln n)^k}{n^x}$$

Donc, d'après 1c, $\|f_n^{(k)}\|_\infty = \frac{(\ln n)^k}{n^a}$ et comme d'après 5b, $\sum \frac{(\ln n)^k}{n^a}$ converge,

$$\sum f_n^{(k)} \text{ converge normalement sur } [a, +\infty[$$

- Convergence uniforme de $\sum f_n^{(k)}$ sur tout segment de $]1, +\infty[$: Comme lors de la question c), $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur tout segment de $]1, +\infty[$, donc uniformément sur tout segment de $]1, +\infty[$.

- Théorème de dérivation terme à terme :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe \mathcal{C}^k sur D_ζ .
- Pour tout $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $\sum f_n^{(i)}$ converge simplement sur D_ζ d'après 5b.
- $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de D_ζ d'après ci-dessus.

Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme (\mathcal{C}^k) des séries de fonctions,

La fonction ζ est de classe \mathcal{C}^k sur D_ζ et $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $\forall x \in D_\zeta$, $\zeta^{(i)}(x) = (-1)^i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^i n}{n^x}$

En conclusion,

La fonction ζ est de classe \mathcal{C}^∞ sur D_ζ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D_\zeta, \zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^k n}{n^x}$

Exercice 2

- 1) La famille \mathcal{B}' est une base de E si et seulement si $\det(\mathcal{B}') \neq 0$. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\det(\mathcal{B}') = \det P = \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right|_{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} = 2 \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = -6 \neq 0$$

Conclusion : $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base

On pouvait aussi montrer que \mathcal{B}' était libre, et comme $\text{Card } \mathcal{B}' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, \mathcal{B}' est donc une base.

- 2) Comme $\varepsilon_1 \in \mathcal{D}$ et ε_2 et $\varepsilon_3 \in \mathcal{P}$, il vient

$$\begin{aligned} u(\varepsilon_1) &= 0 \\ u(\varepsilon_2) &= \varepsilon_2 = 0\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3 \\ u(\varepsilon_3) &= \varepsilon_3 = 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 1\varepsilon_3 \end{aligned}$$

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 3) Par la formule de changement de base : $M = PM'P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, et, après calcul de

P^{-1} , il vient

$$M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Sur votre copie doivent apparaître P^{-1} (calcul par le pivot de Gauss compris) et au moins une étape du calcul de $PM'P^{-1}$.

Calcul direct :

$$u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \quad u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 \quad u(\varepsilon_1) = 0$$

Ce qui nous donne

$$\begin{cases} u(e_1) - u(e_3) = e_1 - e_3 & (1) \\ 2u(e_1) - u(e_2) = 2e_1 - e_2 & (2) \\ u(e_1) + 3u(e_2) - u(e_3) = 0 & (3) \end{cases}$$

Ainsi (1) - (3) nous donne $-3u(e_2) = e_1 - e_3$, et $u(e_2) = \frac{1}{3}(-e_1 + e_3)$.

Puis (2) donne $2u(e_1) = 2e_1 - e_2 + u(e_2) = \frac{5}{3}e_1 - e_2 + \frac{1}{3}e_3$, donc $u(e_1) = \frac{1}{6}(5e_1 - 3e_2 + e_3)$.

Finalement (3) donne $u(e_3) = u(e_1) + 3u(e_2) = \frac{1}{6}(5e_1 - 3e_2 + e_3) - e_1 + e_3 = \frac{1}{6}(-e_1 - 3e_2 + 7e_3)$.

Donc la matrice est

$$M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (D'après e3a PC 2017)

1) Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_0 =$ et $A_0 = U_0 {}^t V_0$.

a) En bonus, une écriture par blocs :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} -U_0 & -U_0 & U_0 & -U_0 \end{array} \right) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Comme $\text{Im } A_0 = \text{Vect}(U_0)$ (l'image est engendrée par les vecteurs colonnes), et que $U_0 \neq 0$, Alors

$$\boxed{\text{rg } A_0 = 1}$$

b) Le théorème du rang s'écrit

$$\dim \text{Ker } A_0 = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Im } A_0 = 4 - 1 = 3$$

Donc $\boxed{\text{Ker } A_0 \neq \{0\}}$

Dès qu'on vous parle de noyau et d'image, et que vous êtes en dimension finie, toujours écrire le théorème du rang. Très souvent incontournable, toujours utile.

Déterminons le noyau : résolvons le système :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A_0 &\iff A_0 X = 0 \\ &\iff x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ &\iff x_3 = x_1 + x_2 + x_4 \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 + x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &\iff X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : Ker } A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\boxed{\text{Une base de Ker } A : \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

Vérification : $\dim \text{Ker } A = 3$.

- c) i) $A_0U_0 = U_0^tV_0U_0 = ({}^tV_0U_0)U_0$. Or ${}^tV_0U_0 = -1 + 1 - 1 - 1 = -2$. Donc

$$A_0U_0 = -2U_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Comme $A_0U_0 \neq 0$, $U_0 \notin \text{Ker } A$

- ii) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la famille suivante :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et } e_4 = U_0$$

Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de $\text{Ker } A$ d'après 1b, elle est libre.

De plus, $e_4 \notin \text{Ker } A = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ d'après 1ci, donc \mathcal{B} est libre.

Or $\text{Card } \mathcal{B} = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, donc \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^4 .

Dans la base \mathcal{B} , la nouvelle matrice de $f_{A_0} : X \mapsto A_0X$ sera :

$$\begin{aligned} f_{A_0}(e_1) &= 0 \\ f_{A_0}(e_2) &= 0 \\ f_{A_0}(e_3) &= 0 \\ f_{A_0}(e_4) &= A_0U_0 = -2e_4 \end{aligned} \quad \text{Mat}(f_{A_0}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Posons P la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} . Alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A_0 = PDP^{-1}$$

L'esprit du sujet n'est pas de calculer un polynôme caractéristique, les valeurs propres etc... mais de raisonner à partir de ce que l'on a trouvé.

- 2) a) Comme $\text{rg } A = 1$, $\text{Im } A = \text{Vect } U$, avec $U \neq 0$. De plus, $\text{Im } A$ est engendré par les vecteurs colonnes. Donc $U = C$ convient – et existe : sinon, $A = 0$, et est de rang 0.

Comme $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \text{Vect}(C)$, Les C_i appartiennent à $\text{Vect}(C)$, et donc

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \ell_j \in \mathbb{R} \quad C_j = \ell_j C$$

En conclusion, Il existe une matrice ligne non nulle $L = (\ell_1 \cdots \ell_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = CL$

- b) En notant c_i les coefficients du vecteur colonne C , par définition du produit matriciel, pour tout i, j , $a_{ij} = c_i \ell_j$. Donc

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n c_i \ell_i = LC$$

De plus $A^2 = CLCL = C(LC)L = (LC)CL$, par associativité du produit matriciel, LC étant une matrice 1×1 , donc un scalaire que l'on peut sortir. Finalement,

$$LC = \text{Tr}(A) \quad \text{et} \quad A^2 = \text{Tr}(A)A$$

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathbb{R}^n$ tels que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. Calculons A^2X de deux façons.

$$\begin{aligned} A^2X &= \text{Tr}(A)AX \\ &= \text{Tr}(A)\lambda X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2X &= A(\lambda X) = \lambda AX \\ &= \lambda^2 X \end{aligned}$$

Donc $(\lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda)X = \lambda^2X - \text{Tr}(A)\lambda X = 0$.

Comme $X \neq 0$, nous avons $\lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda = 0$

Ainsi, $\lambda \in \text{Sp}(A) \implies \lambda$ solution de $\lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda = 0$.

D'où l'inclusion $\text{Sp}(A) \subset \{0, \text{Tr}(A)\}$