# Devoir de Mathématiques numéro 2

## Exercice 1

Calculer la limite de la suite $(u_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = n \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x/n)}{x(1 + x^2)} \,\mathrm{d}x$$

## Exercice 2

On rappelle que $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial « $k$ parmi $n$ ».

**1)** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la formule du binôme pour $(x + y)^n$.

**2)** Justifier que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = 1.$$

**3)** Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = nx.$$

**4)** Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = nx + n(n - 1)x^2.$$

**5)** En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} \leqslant Cn,$$

pour une constante $C > 0$ à préciser.

On se donne maintenant $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$,

$$|x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Pour $x \in [0, 1]$ on partitionne les entiers $k$ naturels entre 0 et $n$ en :

$$X = \left\{ k \in \{0, 1, \dots, n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| < \alpha \right\} \text{ et } Y = \left\{ k \in \{0, 1, \dots, n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| \geqslant \alpha \right\}.$$

**6)** Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|$$

**7)** En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

**8)** En utilisant la définition de l'ensemble $Y$ et les questions précédentes, montrer que

$$\sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\alpha^2 n^2} \sum_{k \in Y} (nx-k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

**9)** Conclure qu'il existe $n$ suffisamment grand tel que :

$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

**10)** En déduire le théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

## Exercice 3

On note $\zeta$ la fonction de la variable réelle $x$ définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On note $D_\zeta$ son ensemble de définition.

**1)** Déterminer $D_\zeta$.

**2)** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n$ définie sur $]1;\ +\infty[$ par :

$$\forall x \in ]1;\ +\infty[, \qquad f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

**a)** Soit $a \in ]1;\ +\infty[$. Montrer que la fonction $\zeta$ est continue sur l'intervalle $[a;\ +\infty[$. Que peut-on en déduire pour la continuité de la fonction $\zeta$ sur $D_\zeta$ ?

**b)** Etudier le sens de variations de $\zeta$.

**c)** Justifier que $\zeta$ admet une limite en $+\infty$.

**d)** Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$.

**e)** En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$,

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

**f)** Déterminer un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque $x$ tend vers 1 par valeurs supérieures.

**g)** Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**h)** Donner l'allure de la courbe représentative de $\zeta$.

**3)** **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in ]1;\ +\infty[,\ f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-\ln(n))^k}{n^x}$.

**b)** Montrer que la fonction $\zeta$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;\ +\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in ]1;\ +\infty[$ sous forme d'une série.