Devoir de Mathématiques numéro 2

Correction

Exercice 1 (E3A MP 2018)

Partie 1 **1)** Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad a_n = b_n = a$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\mathcal{H}_0$: est vraie par hypothèse.
- $\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$a_{n+1} = \sqrt{a^2} = |a| = a \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{2a}{2} = a$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\forall n \geqslant 0 \qquad a_n = b_n = a$.

$$\boxed{\text{Si } a = b \text{ alors } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont constantes égales à } a}$$

2) Soient $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. On a $0 \leqslant (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$. On en déduit que

$$\boxed{\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}}$$

3) Une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$, et la suite (a_n) est bien définie. Avec la question précédente, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$, ce qui s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leqslant b_n$$

Soit $n \geqslant 1$. On a $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqslant \sqrt{a_n^2} = a_n$ et $b_{n+1} \leqslant \dfrac{2b_n}{2} = b_n$. Ceci montre que

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ croît et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ décroît}}$$

Comme $a_n \leqslant b_n$ pour $n \geqslant 1$, les suites sont donc dans $[a_1, b_1]$ à partir du rang 1 et donc bornées (bornée équivaut à bornée à partir d'un certain rang).

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont bornées}}$$

4) Par le théorème de la limite monotone, les suites sont convergentes de limites ℓ_a et ℓ_b dans $[a_1, b_1]$, et donc strictement positives.
En passant à la limite dans la relation de récurrence pour (b_n), on obtient $\ell_a = \ell_b$.

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont convergentes de même limite}}$$

Plus rapide que montrer que $(b_n - a_n)$ a une limite nulle.

5) Notons (a'_n) et (b'_n) les suites définies par les mêmes relations de récurrence mais avec $a'_0 = b$ et $b'_0 = a$. On a alors $a'_1 = a_1$ et $b'_1 = b_1$. Comme les suites sont récurrentes d'ordre 1, elles sont égale à partir du rang 1 et donc de même limite.

$$\boxed{M(b,a) = M(a,b)}$$

De même, Notons (α_n) et (β_n) les suites définies par les mêmes relations de récurrence mais avec $\alpha_0 = \lambda a_0$ et $\beta_0 = \lambda b$. On a alors $\alpha_1 = \lambda a_1$ et $\beta_1 = \lambda b_1$ puis, par récurrence simple, $\alpha_n = \lambda a_n$ et $\beta_n = \lambda b_n$ pour tout n. Finalement,

$$\boxed{\forall \lambda > 0,\ M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)}$$

6) On utilise ceci avec $\lambda = 1/a > 0$: $\dfrac{1}{a}M(a,b) = M(1, b/a) = f(b/a)$. On a donc

$$\boxed{M(a,b) = af\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Partie 2 **1)** $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$ est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Étude en $\pm\infty$:

g est équivalente au voisinage des infinis à $1/t^2$ et donc intégrable sur de tels voisinages (Riemann $\alpha = 2 > 1$).

La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. A fortiori,

$$\boxed{I(a,b) \text{ et } J(a,b) \text{ existent}}$$

La fonction ci-dessus étant paire, son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ vaut celle sur $\mathbb{R}^-$ (par exemple en effectuant le changement de variable $x = -t$). Ainsi, par relation de Chasles

$$\boxed{J(a,b) = 2I(a,b)}$$

2) $\varphi : s \mapsto \dfrac{1}{2}\left(s - \dfrac{ab}{s}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $\varphi'(s) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{ab}{s^2}\right)$ qui ne s'annule pas.

La fonction φ est donc $\mathscr{C}^1$, strictement monotone et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ (attention, pour une bijection, toujours indiquer l'ensemble de départ *et l'ensemble d'arrivée*). Appliquons le théorème de changement de variable. Posons $t = \dfrac{1}{2}\left(s - \dfrac{ab}{s}\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + t^2 &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4s^2}(s^2 - ab)^2 \\
&= \frac{1}{4s^2}\left(s^2(a+b)^2 + (s^2-ab)^2\right) \\
&= \frac{1}{4s^2}\left(s^4 + (a^2+b^2)s^2 + a^2b^2\right) \\
&= \frac{1}{4s^2}(s^2+a^2)(s^2+b^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sqrt{ab})^2 + t^2 &= ab + \frac{1}{4s^2}(s^2-ab)^2 \\
&= \frac{1}{4s^2}(s^2+ab)^2
\end{aligned}$$

Par ailleurs, avec les conventions d'écriture usuelles

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{2}\left(1 + \frac{ab}{s^2}\right) = \frac{ds}{2s^2}(s^2+ab)$$

On en déduit, d'après le théorème de changement de variable, que

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(a^2+s^2)(b^2+s^2)}} = 2I(a,b)$$

Ainsi,

$$\boxed{J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2I(a,b)}$$

3) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad I(a_n, b_n) = I(a,b)$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: Comme $a_0 = a$ et $b_0 = b$, $I(a_0, b_0) = I(a,b)$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. La question précédente donne

$$2I(a_{n+1}, b_{n+1}) = J(a_{n+1}, b_{n+1}) = 2I(a_n, b_n)$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad I(a_n, b_n) = I(a,b)}$

4) On veut passer à la limite ci-dessus et, pour cela, utiliser un théorème d'interversion limite-intégrale. On propose le théorème de convergence dominée.
Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{a_1^2 + t^2}$.

La fonction φ est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Elle est équivalente en $+\infty$ à $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$, qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$).
Donc, par comparaison, φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(a_n^2 + t^2)(b_n^2 + t^2)}}$ est une fonction continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- La suite (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(M(a,b)^2 + t^2)(M(a,b)^2 + t^2)}}$ elle même continue sur $\mathbb{R}_+$.
- D'après la question 3, pour tout $n \geqslant 1$, on a $b_n \geqslant a_n \geqslant a_1 > 0$. On en déduit que

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ |g_n(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{(a_1^2 + t^2)(a_1^2 + t^2)}} = \frac{1}{a_1^2 + t^2} = \varphi(t)$$

  et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après ci-dessus.

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$.
C'est-à-dire

$$\boxed{I(M(a,b), M(a,b)) = I(a,b)}$$

5) On remarque que

$$\forall \alpha > 0,\ I(\alpha, \alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \alpha^2} = \left[\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

Ainsi, avec la question 2.4,

$$I(a,b) = \frac{\pi}{2M(a,b)}$$

ou encore, comme $I(a,b) \neq 0$,

$$\boxed{M(a,b) = \frac{\pi}{2I(a,b)}}$$

Partie 3 **1)** $\varphi : s \mapsto x/s$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée $\varphi'(s) = -x/s^2$ ne s'annule pas.
Donc φ est $\mathscr{C}^1$, strictement monotone et bijective de $]0, \sqrt{x}]$ dans $[\sqrt{x}, +\infty[$.
Par conséquent, d'après le théorème de changement de variable,

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} \qquad \text{et} \qquad \int_{+\infty}^{\sqrt{x}} \frac{(-x/s^2)\ \mathrm{d}s}{\sqrt{(1+x^2/s^2)(x^2+x^2/s^2)}}$$

sont de même nature (donc convergente, la première étant sur le segment $[0, \sqrt{x}]$), et

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} &= \int_{+\infty}^{\sqrt{x}} \frac{(-x/s^2)\ \mathrm{d}s}{\sqrt{(1+x^2/s^2)(x^2+x^2/s^2)}} \\ &= \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s^2+x^2)(1+s^2)}}\end{aligned}$$

Par relation de Chasles, on a

$$I(1,x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s^2+x^2)(1+s^2)}}$$

On conclut ainsi que

$$\boxed{\forall x > 0,\ I(1,x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\ \mathrm{d}t}$$

2) Remarquons que

$$\forall t \geqslant 0,\ \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right| = \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} \leqslant \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

Or pour tout $t \in [0, \sqrt{x}]$, $t^2 \leqslant x$ donc

$$1 + t^2 \leqslant 1 + x \leqslant 1 + 2x + x^2 = (1+x)^2$$

Ainsi, $\sqrt{1+t^2} - 1 \leqslant 1 + x - 1 = x$, et

$$\forall t \in [0, \sqrt{x}],\ \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right| \leqslant \frac{x}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

On intégre cette inégalité entre 0 et $\sqrt{x}$ (aucun problème d'existence) pour obtenir

$$\begin{aligned}\left|I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\ \mathrm{d}t\right| &\leqslant 2\int_0^{\sqrt{x}} \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right|\ \mathrm{d}t \\ &\leqslant 2x\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

On en conclut donc que

$$\boxed{I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\ \mathrm{d}t \text{ est négligeable devant } 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\ \mathrm{d}t \text{ quand } x \text{ tend vers } 0^+}$$

Le quotient des deux fonctions est x, qui tend vers 0 quand x tend vers 0...

3) Soit $\varphi : t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{1 + \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{t + \sqrt{1+t^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\end{aligned}$$

Par changement de variable linéaire $s = t/x$, on. a

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\ \mathrm{d}t = \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1+s^2}} = \left[\ln(s + \sqrt{1+s^2})\right]_0^{1/\sqrt{x}}$$

et finalement,

$$\boxed{\forall x>0,\ \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\ \mathrm{d}t=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$

4) En factorisant par $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ dans le logarithme, il vient

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\ln(1+\sqrt{x+1})=-\frac{\ln(x)}{2}+\ln 2+o(1)$$

qui équivaut donc à $-\ln(x)/2$ quand $x\to 0^+$.
Or, d'après la question 3.2, quand $x\to 0$

$$I(1,x)\underset{x\to 0}{\sim} 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\ \mathrm{d}t$$

On en déduit avec la question 3.3 que

$$I(1,x)\underset{x\to 0}{\sim}-\ln(x)$$

Comme $f(x)=M(1,x)=\dfrac{\pi}{2I(1,x)}$, on a ainsi

$$\boxed{f(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}-\frac{\pi}{2\ln(x)}}$$

5) D'après 1.6 et 1.5,

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=M\left(1,\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}M(x,1)=\frac{1}{x}M(1,x)=\frac{1}{x}f(x)$$

Quand $x\to+\infty$, $\dfrac{1}{x}\to 0^+$ et la question précédente donne alors

$$f\left(x\right)=xf\left(\frac{1}{x}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{\pi x}{2\ln(1/x)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\pi x}{2\ln(x)}}$$

C'est une question qui se contente d'appliquer les résultats précédents : même si vous les avez admis, cette question était faisable.

6) On sait que

$$\forall x>0,\ f(x)=M(1,x)=\frac{\pi}{2I(1,x)}$$

On va alors prouver que $x\mapsto I(1,x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec le théorème de continuité sous le signe somme. Soit $a>0$ et $D=[a,+\infty[$.

- $\forall t>0,\ x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est continue sur $[a,+\infty[$.
- $\forall x\in[a,+\infty[,\ t\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall x\in[a,+\infty[,\ \forall t>0,\ \left|\dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}\right|\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(a^2+t^2)}}=\varphi(t)$.
  D'après 2.1, avec $a=a$ et $b=1$, φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, $x\mapsto I(1,x)$ est continue sur $\displaystyle\bigcup_{a>0}[a,+\infty[=\mathbb{R}_+^*$. Donc en passant à l'inverse ($I(1,x)$ ne s'annule pas),

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$$

7) L'équivalent de la question 4 donne $f(x) \to 0$ quand $x \to 0^+$ et donc

$$\boxed{\text{On prolonge } f \text{ par continuité en 0 en posant } f(0) = 0}$$

On a aussi

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2x \ln(x)} \to +\infty$$

$$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ présente au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale}}$$

8) Avec l'équivalent de la question 5,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Donc en cas d'asymptote $y = ax + b$, on vient de trouver $a = 0$. Or si la courbe de f admet une asymptote horizontale $y = b$ en $+\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$.

Comme f est de limite infinie en $+\infty$ (toujours l'équivalent de la question 5)

$$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ n'admet pas d'asymptote en } +\infty}$$

9) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est décroissante.

Donc, par croissance de l'intégrale, pour tout $x \geqslant y > 0$, $0 < I(1, x) \leqslant I(1, y)$: la fonction $x \mapsto I(1, x)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or $\forall x > 0,\ f(x) = M(1, x) = \dfrac{\pi}{2I(1, x)}$, donc par passage à l'inverse – tout est strictement positif,

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+}$$

Partie 4 **1)** Avec les questions 2.2 et 2.1,

$$I(1, x) = \frac{1}{2} J\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right) = I\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right)$$

On utilise alors la question 1.5 avec $\lambda = \dfrac{1+x}{2} > 0$:

$$M\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right) = \frac{1+x}{2} M\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

On conclut alors avec la question 2.5 (utilisée deux fois) que

$$\boxed{I(1, x) = \frac{2}{1+x} I\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)}$$

2) **a)** On a $w_{n+1} = h(w_n)$ avec $h(t) = \dfrac{2\sqrt{t}}{1+t}$. Comme $h(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $w_0 \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n > 0$$

et (w_n) est bien définie.

La fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall t > 0$, $h'(t) = \dfrac{1-t}{\sqrt{t}(1+t)^2}$ est du signe de $1 - t$:

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Ainsi $h(\mathbb{R}_+^*) =]0,1]$ et $0 < w_n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$.
De plus, h est croissante sur $]0,1]$ et comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_{n+2} - w_{n+1} = h(w_{n+1}) - h(w_n)$$

la suite $(w_{n+1} - w_n)$ est de signe constant.
Mais, $w_2 - w_1 = \dfrac{w_1(1-w_1)}{1+w_1}$ et donc, comme $w_1 \in]0,1]$, la suite est de croissante (à partir de $n = 1$) et majorée par 1 donc convergente vers $\ell \in [w_1, 1] \subset]0,1]$.
Or, en passant à la limite dans la relation $w_{n+1} = h(w_n)$, comme h est continue en ℓ, il vient $\ell = h(\ell)$ puis $\ell = 0$ ou 1. En conclusion :

$$\boxed{(w_n) \text{ converge vers } 1}$$

b) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad I(1,x) = I(1, w_{n+1}) \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1+w_k}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: la question 4.1 donne $I(1,x) = \dfrac{2}{1+x} I(1, w_1)$, ce qui correspond à la formule pour $n = 0$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie :

$$\begin{aligned} I(1,x) &= I(1, w_{n+1}) \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1+w_k} \\ &= \frac{2}{1+w_{n+1}} I(1, w_{n+2}) \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1+w_k} && \text{(question 4.1, } x = w_{n+1}) \\ &= I(1, w_{n+2}) \prod_{k=0}^{n+1} \frac{2}{1+w_k} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad I(1,x) = I(1, w_{n+1}) \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1+w_k}}$

c) On a vu en question 3.6 que $x \mapsto I(1,x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} I(1, w_{n+1}) = I(1, \lim_{n\to+\infty} w_{n+1})$$

Or d'après a), $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$ et d'après 2.5 $I(1,1) = \dfrac{\pi}{2}$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} I(1, w_{n+1}) = I(1,1)\frac{\pi}{2}$$

.
Comme $p_n = \dfrac{I(1, w_{n+1})}{I(1,x)}$, on en déduit que (p_n) converge et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \ell = \frac{\pi}{2I(1,x)} \neq 0}$$

Partie 5 **1)** Soit $x \in]-1,1[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a donc $|x\sin(t)| < 1$ et donc $1 - x^2\sin^2(t) > 0$. Ainsi, $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2\sin^2(t)}}$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$ et son intégrale sur ce segment existe.

$$\boxed{K \text{ est bien définie sur }]-1,1[}$$

2) La fonction $\varphi : t \mapsto \text{Arctan}\,(t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, strictement monotone et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[0, \pi/2[$.
Comme $I(1,x)$ converge, d'après le théorème de changement de variable il vient

$$\begin{aligned} I(1,x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1/\cos^2(s)}{\sqrt{(1+\tan^2(s))(x^2+\tan^2(s))}}\ \mathrm{d}s \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{x^2\cos^2(s)+\sin^2(s)}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ I(1,x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2\cos^2(t)+\sin^2(t)}}}$$

On regarde les bornes de ce qu'on a $(0, +\infty)$ et de ce qu'on veut $(0, \pi/2)$, puis on cherche une fonction qui envoie 0 sur 0 et $\pi/2$ sur $+\infty$ (ou l'inverse).

3) Comme $\sin^2 = 1 - \cos^2$, on a donc

$$I(1,x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(1-x^2)\cos^2(t)}}$$

Le changement affine $u = \pi/2 - t$ donne alors

$$I(1,x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-(1-x^2)\sin^2(u)}}$$

Quand $x \in]0,1[$, $1 - x^2 > 0$ et est égal au carré de sa racine carrée et ainsi

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ I(1,x) = K(\sqrt{1-x^2})}$$

5) Le cours nous dit que $g\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est DSE de rayon 1. Son développement est alors donné par Taylor :

$$\forall t \in]-1,1[,\ g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

On montre par récurrence que

$$g^{(n)}(t) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2} (1-t)^{-\frac{2n+1}{2}} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} (1-t)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$\boxed{\forall t \in]-1,1[,\ g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^n}$$

6) Il nous suffit alors d'appliquer l'égalité en $(x\sin(t))^2$ (qui est dans $]-1,1[$) :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}\sin^{2n}(t)}$$

7) A ce niveau, on a

$$\forall x \in]-1,1[,\ K(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}\sin^{2n}(t)\ \ \mathrm{d}t$$

On veut intervertir les symboles. On va utiliser le théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions. Ici, $x \in]-1,1[$ est fixé.

- $f_n\ :\ t \mapsto \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t)$ est le terme général d'une série de fonctions continues qui converge simplement sur $[0, \pi/2]$ vers $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2(t)}}$ elle même continue.
- Comme les fonctions sont positives, la formule de Stirling nous donne

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(t)| \,\mathrm{d}t &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} W_n \\ &= \frac{\pi}{2} frac((2n)!)^2 16^n (n!)^4 x^{2n} \\ &\sim \dots \\ &\sim \frac{x^{2n}}{2n} \end{aligned}$$

Or, comme $|x| < 1$, $\dfrac{x^{2n}}{2n} = o(1/n^2)$ par croissance comparée, donc $\sum \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(t)| \,\mathrm{d}t$ converge.

D'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$K(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t) \ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} W_n$$

Il reste à utiliser l'expression de W_n pour conclure que

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ K(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((2n)!)^2}{16^n (n!)^4} x^{2n}}$$

8) On a

$$M(3,5) = M(5,3) = 5M(1,3) = \frac{5\pi}{2} \frac{1}{I(1, 3/5)} = \frac{5\pi}{2} \frac{1}{K(4/5)}$$

On déduit $M(3,5)$ de $K(4/5)$ dont on a une expression sous forme de somme de série numérique.