Devoir de Mathématiques numéro 2

Exercice 1

Les parties sont largement indépendantes, mais le candidat pourra admettre les résultats des parties intermédiaires. Les notations sont conservées d'une partie à l'autre.

Partie 1

Soient a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\begin{cases} a_0 = a & b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N} & a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ & b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

1) Que dire des suites (a_n) et (b_n) si $a = b$?

2) Montrer que si $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, on a

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$$

3) Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones à partir du rang 1, puis qu'elles sont bornées.

4) Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite strictement positive.

On notera $M(a, b)$ la limite commune aux suites (a_n) et (b_n).
On définira la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = M(1, x)$.

5) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, exprimer en fonction de λ et $M(a, b)$ les quantités suivantes :

$$M(b, a) \quad \text{et} \quad M(\lambda a, \lambda b)$$

6) Justifier que $M(a, b) = af\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

Partie 2

Pour a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les intégrales

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}} \quad \text{et} \quad J(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}$$

1) Justifier que les intégrales $I(a, b)$ et $J(a, b)$ convergent, puis que $J(a, b) = 2I(a, b)$.

2) En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{1}{2}\left(s - \dfrac{ab}{s}\right)$, montrer que

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2I(a, b)$$

3) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ I(a_n, b_n) = I(a, b)$$

4) Justifier que

$$I(M(a, b), M(a, b)) = I(a, b)$$

On énoncera précisément le théorème utilisé.

5) Conclure que

$$M(a,b) = \frac{\pi}{2I(a,b)}$$

Partie 3 **1)** On fixe $x > 0$. En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{x}{s}$, montrer que

$$I(1,x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$$

2) Montrer que $I(1,x) - 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$ est négligeable devant $2\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$ quand x tend vers 0^+.

3) Dériver $t \mapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})$ et en déduire une expression réduite pour $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$.

4) Déterminer un équivalent simple de $I(1,x)$ en $x = 0^+$ et en déduire que

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)}$$

5) Pour $x > 0$, déterminer une relation simple entre x, $f(x)$ et $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et en déduire que

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}$$

6) (5/2) Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

7) Montrer que l'on peut prolonger par continuité la fonction f en 0. Que dire de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 de la fonction ainsi prolongée ?

8) La courbe de f admet-elle une asymptote en $+\infty$?

9) Préciser rapidement les variations de f et tracer sa courbe sur $]0,+\infty[$.

Partie 4 **1)** Soit $x > 0$, montrer que

$$I(1,x) = \frac{2}{1+x} I\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

2) On définit la suite (w_n) par $w_0 = x$ et $w_{n+1} = \dfrac{2\sqrt{w_n}}{1+w_n}$.

a) Montrer que la suite (w_n) converge vers 1.

b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I(1,x) = I(1,w_{n+1}) \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1+w_k}$$

c) Soit la suite (p_n) définie par

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{1+w_k}{2}$$

Montrer que la suite (p_n) converge vers une limite ℓ non nulle, puis exprimer de manière simple $I(1,x)\ell$.

Partie 5

On définit la fonction K par

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}\,dt$$

1) Montrer que la fonction K est bien définie sur $]-1,1[$.

2) En effectuant un changement de variable, montrer que

$$I(1,x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{x^2\cos^2(t)+\sin^2(t)}}$$

3) Montrer que si $x \in]0,1]$, on a

$$I(1,x) = K(\sqrt{1-x^2})$$

4) Ceci n'est pas une question. Les questions qui suivent sont pour l'instant réservées aux 5/2.
On définit la suite d'intégrales (W_n) par

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\ dt$$

On rappelle que :

$$W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$$

5) (5/2) Rappeler la valeur du rayon de convergence du développement en série entière de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$, puis justifier l'expression du terme général de la suite de ses coefficients (α_n).

(3/2) Rappeler le terme général du DL de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en 0.

6) Démontrer que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}\sin^{2n}(t)$$

7) Justifier que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$K(x) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^2}{16^n(n!)^4} x^{2n}$$

8) En déduire une série numérique permettant d'obtenir la valeur de $M(3,5)$.