Devoir de Mathématiques numéro 2

Correction

Exercice 1 (PT 2010 C)

1) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, posons $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^\beta \cos^2 x}$. La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$ donc $0 < 1 + x^\beta \cos^2 x \leqslant 1 + x^\beta$, et en passant à l'inverse

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^\beta \cos^2 x} \geqslant \frac{1}{1 + x^\beta} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^\beta}$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}$ est une intégrale de Riemann divergente ($\beta \leqslant 1$), donc

$$\boxed{\text{L'intégrale de } f \text{ diverge en } +\infty.}$$

2) On se place désormais dans le cas où $\beta > 1$.

a) Soit $X > 0$, et n la partie entière de X/π. Alors, la relation de Chasles s'écrit

$$\int_0^X \frac{1}{1 + x^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1 + x^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x \right) + \int_{n\pi}^X \frac{1}{1 + x^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^\beta \cos^2 x}$ étant positive sur $\mathbb{R}_+$, la positivité de l'intégrale donne l'encadrement

$$0 \leqslant \int_{n\pi}^X \frac{1}{1 + x^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x \leqslant I_{n,\beta}$$

Donc finalement

$$\sum_{k=0}^{n-1} I_{k,\beta} \leqslant \int_0^X \frac{1}{1 + x^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n} I_{k,\beta}$$

Donc, si la série converge, alors l'intégrale converge (par encadrement, les deux cotés ayant la même limite). La première inégalité suffit à prouver que, si la série diverge, comme elle est à termes positifs, alors l'intégrale diverge aussi [1]. En conclusion,

$$\boxed{\text{La série } \sum_k I_{k,\beta} \text{ et l'intégrale } I_\beta \text{ sont de même nature.}}$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. La fonction $x \mapsto x^\beta$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc, pour tout $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$,

$$\begin{aligned} 0 < (k\pi)^\beta &\leqslant \quad x^\beta &&\leqslant ((k+1)\pi)^\beta \\ \Longrightarrow 0 < 1 + (k\pi)^\beta \cos^2 x &\leqslant 1 + x^\beta \cos^2 x &&\leqslant 1 + ((k+1)\pi)^\beta \cos^2 x \\ \Longrightarrow \frac{1}{1 + ((k+1)\pi)^\beta \cos^2 x} &\leqslant 1 + x^\beta \cos^2 x &&\leqslant \frac{1}{1 + (k\pi)^\beta \cos^2 x} \end{aligned}$$

Et finalement en intégrant cet encadrement sur $[k\pi, (k+1)\pi]$,

1. On peut aussi prouver directement que, si l'intégrale converge, alors, en prenant $X = n\pi$, la série converge. C'est le sens « facile ».

$$\boxed{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+(k+1)^\beta \pi^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x \leqslant I_{k,\beta} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+k^\beta \pi^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x}$$

c) Effectuons le changement de variable $\varphi : x \mapsto \tan x$. La fonction φ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective de $[0,\pi/2[$ dans $[0,+\infty[$. De plus $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et $\cos^2 x = \dfrac{1}{\tan'(x)} = \dfrac{1}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+C^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+C^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{1+C^2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{1+C^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Mise sous forme } \boxed{1}+u^2 \text{ du dénominateur : on factorise par la constante)} \\
&= \frac{1}{1+C^2}\left[\sqrt{1+C^2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{1+C^2}}\right)\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{1+C^2}}
\end{aligned}$$

d) D'après 1, l'intégrale I_β et la série $\sum_k I_{k,\beta}$ sont de même nature, nous allons donc étudier la série. La formule trouvée à la question 3 permet de calculer les intégrales trouvée à la question 2. L'encadrement devient

$$\frac{\pi}{2\sqrt{1+((k+1)^\beta\pi^\beta)^2}} \leqslant I_{k,\beta} \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{1+(k^\beta\pi^\beta)^2}}$$

Les deux cotés de l'encadrement sont équivalent à $\dfrac{\pi^{1-\beta}}{2k^\beta}$, par conséquent

$$I_{k,\beta} \sim \frac{\pi^{1-\beta}}{2k^\beta}$$

Or $\sum \dfrac{1}{k^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$ (Riemann), donc par équivalence la série $\sum_k I_{k,\beta}$ est convergente pour tout $\beta > 1$. Ainsi,

$$\boxed{\text{L'intégrale } I_\beta \text{ converge pour tout } \beta > 1}$$

Exercice 2 (E3A PSI 2015)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1,+\infty[$.

- Étude en $t=1$: On pose $t = 1+h$. $(1+h)^2 - 1 = h^2 + 2h = h(h+2)$ donc

$$g(1+h) = \frac{1}{(1+h)^x\sqrt{(1+h)^2-1}} = \frac{1}{(1+h)^x\sqrt{h}\sqrt{h+2}} \sim \frac{1}{1^x\sqrt{h}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2h}}$$

  Or $h \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ est intégrable en 0 (Riemann, $\alpha = 1/2 < 1$), donc, par équivalence, la fonction g est intégrable en 0.

- Étude au voisinage de $+\infty$:

$$g(t) \sim \frac{1}{t^{x+1}}$$

  Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^{x+1}}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $x+1 > 1$, c'est-à-dire $x > 0$ (Riemann, $\alpha = x+1$). Donc, par équivalence, g est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $x > 0$.

Donc g est intégrable sur $]1, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$.
De plus g est positive, donc $|g| = g$: $f(x)$ existe si et seulement si $x > 0$. Conclusion :

$$\boxed{I = \mathbb{R}_+^*}$$

2) Existence : $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Étude au voisinage de $+\infty$: $\dfrac{1}{e^x + e^{-x}} \sim \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.
Or $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ ($x \mapsto e^{-\beta x}$ avec $\beta = 1 > 0$).
Donc, par équivalence, $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ l'est aussi.
Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}}$ converge.
Calcul : Effectuons le changement de variable $u = e^x$, où $x \mapsto e^x$ est une bijection strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Donc le théorème de changement de variable s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}} = \int_1^{+\infty} \frac{1/u}{u + 1/u} \,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} \,\mathrm{d}u = [\operatorname{Arctan} u]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{4}}$

3) La fonction φ est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$.
Effectuons le changement de variable $t = \varphi(u)$ (donc $\mathrm{d}t = \mathrm{sh}\,(u)\,\mathrm{d}u$).
D'après le théorème de changement de variable, les deux intégrales sont de même nature, or d'après 1) l'une des deux converge, donc toutes les intégrales convergent.

$$f(1) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2 - 1}} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}\,(u)\,\mathrm{d}u}{\mathrm{ch}\,(u)\sqrt{\mathrm{sh}^{\,2}(u)}} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{ch}\,(u)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{e^u + e^{-u}}$$

Car $\mathrm{ch}^{\,2} - 1 = \mathrm{sh}^{\,2}$ et $\mathrm{sh} \geqslant 0$ sur $[0, +\infty[$. En conclusion, d'après 2),

$$\boxed{f(1) = \frac{\pi}{2}}$$

4) Comme nous l'indique l'énoncé,

$$\left(\frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}\right)' = \frac{\mathrm{ch}^{\,2} - \mathrm{sh}^{\,2}}{\mathrm{ch}^{\,2}} = \frac{1}{\mathrm{ch}^{\,2}}$$

De plus, avec le même changement de variable qu'à la question précédente,

$$f(2) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{t^2 - 1}} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{ch}^{\,2}(u)} = \left[\frac{\mathrm{sh}\,(u)}{\mathrm{ch}\,(u)}\right]_0^{+\infty} = \lim_{X \to +\infty} \frac{\mathrm{sh}\,(X)}{\mathrm{ch}\,(X)}$$

Or, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{\mathrm{sh}\,(X)}{\mathrm{ch}\,(X)} = \dfrac{e^X - e^{-X}}{e^X + e^{-X}} \sim \dfrac{e^X}{e^X} = 1$. Donc $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \frac{\mathrm{sh}\,(X)}{\mathrm{ch}\,(X)} = 1$, et

$$\boxed{f(2) = 1}$$

5) Soit $x \in I$.

$$\forall t \in]1, +\infty[, \qquad \frac{1}{t^x\sqrt{t^2 - 1}} \geqslant 0$$

Donc, par positivité de l'intégrale, $\boxed{f \text{ est positive sur } I}$

6) Pour tout $t > 1$, $\ln(t) > 0$ donc $x \mapsto e^{-x\ln t} = \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante.

(Exemple typique où on commence à chercher au brouillon, puis au propre on « renverse » la rédaction.)

Soit $(x, y) \in I^2$ tels que $x \leqslant y$. D'après ci-dessus

$$\forall t \in]1, +\infty[\qquad \frac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}} \geqslant \frac{1}{t^y\sqrt{t^2-1}}$$

Donc par croissance de l'intégrale, $f(x) \geqslant f(y)$. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } I}$$

7) Soit $a > 0$, montrons que f est dérivable sur $[a, +\infty[$. Soit $h(x, t) = \dfrac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times]1, +\infty[$.

Posons $\varphi(t) = \dfrac{\ln(t)}{t^a\sqrt{t^2-1}}$ pour $t \in]1, +\infty[$. φ est continue et positive (car $t \geqslant 1$ donc $\ln t \geqslant 0$).

Étude en $t = 1$: $t = 1 + h$ et

$$\varphi(1+h) = \frac{\ln(1+h)}{(1+h)^a\sqrt{h}\sqrt{2+h}} \sim \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2}}$$

Donc φ est prolongeable par continuité en $t = 1$ par $\varphi(1) = 0$. Donc φ est intégrable en 0.

Étude au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(t) = \frac{\ln(t)}{t^a\sqrt{t^2-1}} \sim \frac{1}{t^{a+1}(\ln t)^{-1}}$$

On reconnaît une intégrale de Bertrand qu'il faudrait étudier (cf cours). Donc φ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Donc φ est intégrable sur $]1, +\infty[$.

<u>Théorème de dérivation</u> :

- $\forall t \in]1, +\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -\dfrac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}$.
- $\forall x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $]1, +\infty[$ (d'après 1)) ;
  la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]1, +\infty[$.
- Soit $\varphi :]1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ la fonction définie ci-dessus. φ est **intégrable sur** $]1, +\infty[$ d'après les préliminaires, et

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times]1, +\infty[, \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\right| = \frac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}} \leqslant \frac{\ln(t)}{t^a\sqrt{t^2-1}} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a, +\infty[\text{ et } f'(x) = \int_1^{+\infty} -\frac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t.}$$

Comme ce résultat est vrai pour tout $a > 0$, $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \bigcup_{a>0} [a, +\infty[= I}$

Comme $\dfrac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}} \geqslant 0$ sur $]1, +\infty[$, $f' \leqslant 0$ par croissance de l'intégrale, puis $\boxed{f \text{ décroissante sur } I}$

8) Soit $x \in I$ fixé.

$v' : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$ et $v : t \mapsto \sqrt{t^2-1}$ en est une primitive.

$u : t \mapsto \dfrac{1}{t^{x+1}}$ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ de dérivée $u' : t \mapsto -\dfrac{(x+1)}{t^{x+2}}$.

$u\times v : t\mapsto \dfrac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+1}}$ est de limite nulle en 1 et en $+\infty$.
Comme l'intégrale de gauche ($f(x)$) converge, le théorème d'intégration par partie s'écrit

$$f(x) = [uv]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -(x+1)\frac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+2}}\ \mathrm{d}t = (x+1)\int_1^{+\infty} \frac{t^2-1}{t^{x+2}\sqrt{t^2-1}}\ \mathrm{d}t$$

En cassant la fraction, comme toutes les intégrales existent, on a alors

$$f(x) = (x+1)\left(f(x) - f(x+2)\right)$$

On en déduit que

$$\boxed{f(x+2) = \frac{x}{x+1}f(x)}$$

9) *On exprime les premiers termes de $f(2p)$ sans effectuer les calculs, puis on conjecture une formule, que l'on simplifie, et finalement au propre on se contente de la montrer par récurrence.*
Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_p : \quad f(2p) = \frac{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2}{(2p-1)!}$$

est vraie pour tout $p \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: est vraie car $f(2) = 1$ d'après 4.
- $\underline{\mathcal{H}_p \Longrightarrow \mathcal{H}_{p+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_p$ vraie.

$$\begin{aligned} f(2p+2) &= \frac{2p}{2p+1}f(2p) && \text{(question 8)} \\ &= \frac{2^2p^2}{(2p+1)(2p)}\frac{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2}{(2p-1)!} && (\mathcal{H}_p) \\ &= \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall p \geqslant 1 \quad \dfrac{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2}{(2p-1)!}}$

10) Comme, d'après la question 8,

$$\forall x > 0, \qquad \varphi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x+2) = (x+1)f(x+1)\frac{x}{x+1}f(x) = \varphi(x)$$

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est périodique de période 1.}}$$

De plus $\varphi(1) = 1 \times f(1)f(2) = \dfrac{\pi}{2}$ d'après les questions 3 et 4. Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(n) = \varphi(1) = \frac{\pi}{2}}$$

11) Par définition de φ, $\varphi(x) = xf(x)f(x+1)$ et f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 7. Donc φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et en particulier en 1 :

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x+1) = \varphi(1) = \frac{\pi}{2}$$

Donc par 1-périodicité de φ, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$, ce qui s'écrit aussi

$$\varphi(x) = xf(x+1)f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

Or $f(x+1) \underset{0}{\sim} f(1) = \dfrac{\pi}{2}$, d'où

$$\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}}$$

12) D'après 10, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = nf(n)f(n+1) = \dfrac{\pi}{2}$. Donc $\boxed{f(n)f(n+1) = \dfrac{\pi}{2n}}$.

Comme f est décroissante et positive, pour tout $n \geqslant 2$,

$$f(n)f(n+1) \leqslant (f(n))^{\leqslant} f(n-1)f(n)$$

En remplaçant, il vient

$$\frac{\pi}{2n} \leqslant f(n)^2 \leqslant \frac{\pi}{2(n-1)}$$

Puis

$$1 \leqslant \frac{2n}{\pi} f(n)^2 \leqslant \frac{n}{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{\pi} f(n)^2 = 1$, puis, toujours comme $f \geqslant 0$,

$$\boxed{f(n) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

13) *C'est encore une fois la preuve du théorème de comparaison série/intégrale qui nous montre la voie : il faut passer d'une limite sur $\mathbb{N}$ à une limite sur $\mathbb{R}$ grâce à la décroissance de f.*

Pour tout $x \geqslant 1$, comme f est décroissante, avec $n = \lfloor x \rfloor$,

$$f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$$

Puis

$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}} f(n+1) \leqslant \sqrt{\frac{2x}{\pi}} f(x) \leqslant \sqrt{\frac{2x}{\pi}} f(n)$$

Or $\sqrt{\dfrac{2x}{\pi}} f(n) \sim \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} f(n) \sim 1$, et de même $\sqrt{\dfrac{2x}{\pi}} f(n+1) \sim \sqrt{\dfrac{2(n+1)}{\pi}} f(n+1) \sim 1$.

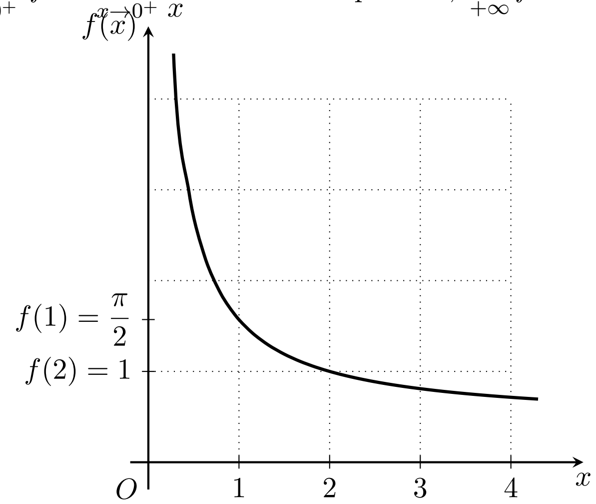
Donc, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2x}{\pi}} f(x) = 1$, et

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}}$$

14) *Cette question peut se faire sans avoir traité les précédentes : on se contente d'admettre les résultats – à la limite en 0^+ près.*

D'après 6, f est décroissante. D'après 11, $\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. D'après 13, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. D'où le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
f	$+\infty$	0



15) L'équivalent de f en $+\infty$ obtenu à la question 13 nous donne celui de φ :

$$\varphi(x) = xf(x)f(x+1) \sim x\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sqrt{\frac{\pi}{2(x+1)}} \sim \frac{\pi}{2}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}$ (limite sur les réels). Or φ est 1-périodique, donc φ est constante :

$$\forall x > 0 \qquad \varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(x+n) = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est constante sur } \mathbb{R}^{+*}}$$

Exercice 3 (E3A PC 2017) **1)** À $x \in \mathbb{R}$ fixée, $\sum \dfrac{1}{n^x}$ est une série de Riemann, qui converge si et seulement si $x > 1$. Donc

$$\boxed{\mathscr{D}_\zeta =]1, +\infty[}$$

2) Soit $a \in]1;\ +\infty[$.

Montrons que la série de terme général f_n converge normalement sur $[a, +\infty[$:

Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x > 1$, $f_n(x) = e^{-x\ln n}$, d'où le tableau de variations :

x	a	$+\infty$
f_n	$\dfrac{1}{n^a}$ $\searrow$	0

Donc $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^a}$.

Or $a > 1$, donc $\sum \|f_n\|_\infty$ converge. Par conséquent, $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

Conclusion :

Ainsi, $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. Or f_n est continue sur $[a, +\infty[$, Donc

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est continue sur l'intervalle } [a;\ +\infty[.}$$

La fonction ζ est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$, elle est donc continue sur $\bigcup\limits_{a>1} [a, +\infty[=]1, +\infty[$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Pour tout $x \in]1;\ +\infty[$, $f_n(x) = e^{-x\ln n}$, donc f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1;\ +\infty[$ et

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1;\ +\infty[, \qquad f_n^{(k)}(x) = (-\ln(n))^k\, e^{-x\ln n} = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}}$$

b) Montrons que la série de terme général $f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$: Soit $a > 1$.

Comme $|f_n^{(k)}| = |-\ln n|^k\,|f_n|$, (et que $\ln n \geqslant 0$),

$$\|f_n^{(k)}\|_\infty = (\ln n)^k \|f_n\|_\infty = \frac{(\ln n)^k}{n^a}$$

On a donc une série de Bertrand : refaire rapidement la preuve.

Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^k}{n^{\frac{a-1}{2}}} = 0$ $(a > 1)$, donc

$$\|f_n^{(k)}\|_\infty = \frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}\,\frac{(\ln n)^k}{n^{\frac{a-1}{2}}} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}\right)$$

Or $\dfrac{a+1}{2} > 1$, donc $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$ converge (Riemann), donc par comparaison $\sum \|f_n^{(k)}\|_\infty$ converge. Par conséquent, $\sum_n f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

<u>Conclusion</u> : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_n f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, donc d'après le théorème de dérivation terme à terme, $\zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ et on peut intervertir dérivation et sommation.

Comme cette propriété est vraie pour tout $a > 0$, est elle vraie sur $\bigcup_{a>1} [a, +\infty[=]1, +\infty[$:

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]1;\ +\infty[\text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1;\ +\infty[, \quad \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.}$$

4) D'après la question 3, pour tout $x > 1$, $\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{-\ln n}{n^x} < 0$ comme somme de nombres négatifs. Donc

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est décroissante.}}$$

On peut aussi étudier le signe de $\zeta(x) - \zeta(y)$ quand $1 < x < y$.

5) **a)** La fonction ζ est positive comme somme de nombres positifs, décroissante d'après la question 4. Donc elle décroissante minorée :

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ possède une limite finie en } +\infty}$$

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \geqslant 2$. Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n^x} \geqslant 0$ donc

$$\zeta(x) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \geqslant 1$$

De plus, pour tout $n \geqslant 1$, donc pour tout $n > N$, f_n est décroissante donc $f_n(x) \leqslant f_n(2)$, ainsi

$$\boxed{1 \leqslant \zeta(x) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$$

c) *Donnez des noms aux objets – ici la limite de ζ en $+\infty$. Vous avez ensuite à votre disposition toute la puissance du calcul algébrique.*

Soit $\ell = \lim_{x \to +\infty} \zeta(x)$. Puisque la somme $\sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^x}$ est finie et que

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} = \lim_{x \to +\infty} e^{-x \ln n} = 0$$

On peut passer à la limite dans chacun des membres de l'encadrement précédent, ce qui nous donne

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \qquad 1 \leqslant \ell \leqslant 1 + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Puis passons à la limite lorsque $N \to +\infty$: $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série convergente, donc son reste d'ordre N, $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$, est (défini et) de limite nulle :

$$\lim_{N \to +\infty} R_N = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

D'où $\ell = 1$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1}$$

6) Soit $x > 1$. La fonction $\varphi : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante donc

$$\forall t \in [n, n+1] \qquad \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x}$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{(n+1)^x} = \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^x}$$

La série converge vers $\zeta(x)$, et l'intégrale converge (Riemann, $x > 1$). On somme donc entre $n = 1$ et $+\infty$:

$$\zeta(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x)$$

De plus, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}$. Donc

$$\zeta(x) - 1 \leqslant \frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant \frac{1}{x-1} + 1$$

L'inégalité la plus à droite vient de celle la plus à gauche décalée de 1. Ainsi, avec $x = 1 + h$, en multipliant par h,

$$\boxed{1 \leqslant h\zeta(1+h) \leqslant 1 + h}$$

Donc, par encadrement, $\lim\limits_{h\to 0} h\zeta(1+h) = 1$. Ce qui nous donne $\zeta(1+h) \sim \dfrac{1}{h}$, puis

$$\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$$

7) Cf ci-dessous.

8) **a)** La suite $a_n = \dfrac{1}{n^x}$ est positive, décroissante ($x > 0$), de limite nulle ($x > 0$). Donc, d'après le critère des séries alternées, $\sum(-1)^n a_n$ converge.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*}$$

b) Soit $a > 0$. Montrons que la série $\sum(-1)^n f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$:
À $x \geqslant a$ fixé, $\sum(-1) f_n(x)$ est une série vérifiant le critère des séries alternées, donc le reste est majoré par le module du premier terme négligé :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$$

De plus, comme ci-dessus (question 2), $\dfrac{1}{(n+1)^x} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^a}$, donc $\|R_n\|_\infty$ existe et

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$ par encadrement.
Ainsi $\sum(-1)^n f_n$ converge uniformément vers F sur $[a, +\infty[$.
De plus, pour tout $n \geqslant 1$, $(-1)^n f_n$ est continue sur $[a, +\infty[$.
Donc F est continue sur $[a, +\infty[$, et ce pour tout $a > 0$, par conséquent

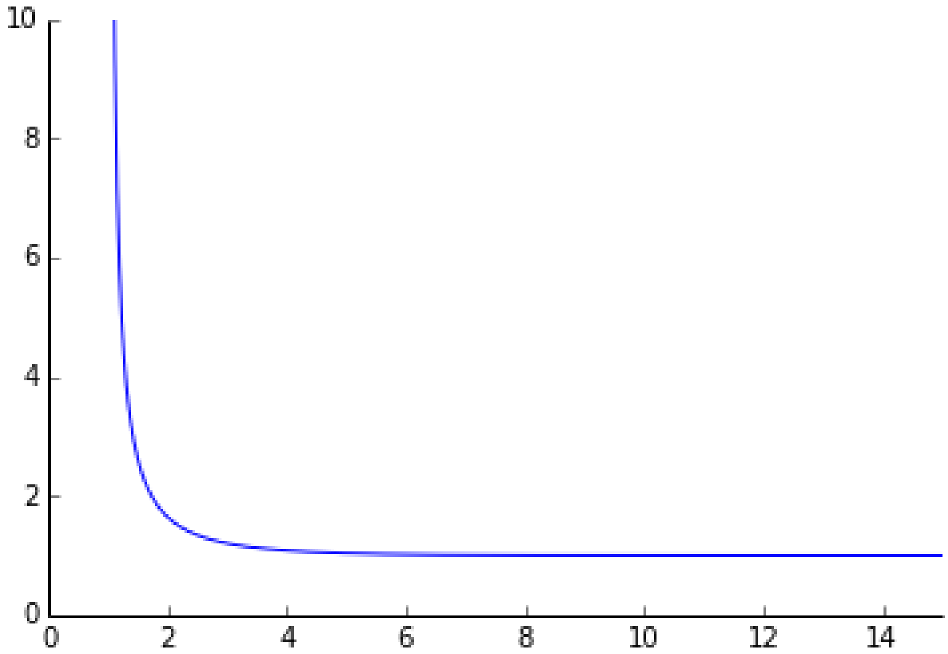


FIGURE 1 – La fonction ζ

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$$

c) Soit $x > 1$.

$$\begin{aligned}
\zeta(x) + F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \\
&= 2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^x} + 0\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^x} \\
&= \frac{2}{2^x} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x} \\
&= 2^{1-x}\zeta(x)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in]1;\ +\infty[,\ \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)}$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{1-x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$ d'après la question 5. Comme $F(x) = 2^{1-x}\zeta(x) - \zeta(x)$,

$$\boxed{\lim_{+\infty} F = -1}$$

Exercice 4 (CCP PC 2013) **1) a)** La fonction $|f|$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc bornée et atteint ses bornes. Soit M son maximum : $M = \|f\|_\infty$.

Soit $g_n(t) = f(t^n)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Les g_n sont continues donc continues par morceaux sur $[0, 1]$.

Convergence simple de la suite (g_n) sur $[0, 1]$:

- Pour $t \in [0, 1[$ fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = 0$, donc par continuité de f en 0,

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = f(\lim_{n\to+\infty} t^n) = f(0)$$

- Pour $t = 1$, $g_n(1) = f(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$.

Donc la suite (g_n) converge simplement vers $g:\begin{array}{rcl}[0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t<1 & \mapsto & f(0) \\ 1 & \mapsto & f(1)\end{array}$, continue par morceaux sur $[0,1]$.

Hypothèse de domination : Soit $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ constante égale à M. Cette fonction est intégrable sur le segment $[0,1]$, et

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,1],\qquad |g_n(t)|=|f(t^n)|\leqslant M=\varphi(t)$$

Conclusion : D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\lim_{n\to+\infty}f(t^n)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t=f(0)$. Finalement : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}I_n=f(0)}$.

b) Effectuons le changement de variable $u=\psi(t)=t^n$ entre 0 et 1. Donc $\mathrm{d}u=nt^{n-1}\,\mathrm{d}t$, et $t=u^{1/n}$. Les bornes ne changent pas. ψ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante, bijective. D'après le théorème de changement de variable,

$$nI_n=\int_0^1\frac{f(t^n)}{t^{n-1}}nt^{n-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{f(u)}{u^{1-\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}u$$

Convergence simple : Posons $h_n(u)=\dfrac{f(u)}{u^{1-\frac{1}{n}}}$ et $h(u)=\dfrac{f(u)}{u}$, pour $u\in]0,1]$.

$$\forall u\in]0,1],\qquad \lim_{n\to+\infty}h_n(u)=\lim_{n\to+\infty}h(u)u^{\frac{1}{n}}=h(u)$$

Donc la suite (h_n) converge simplement vers h sur $]0,1]$. Toutes ces fonctions sont continues donc continues par morceaux sur $]0,1]$.

Hypothèse de domination : Pour tout $u\in]0,1]$, $0\leqslant u^{\frac{1}{n}}\leqslant 1$, donc

$$\forall u\in]0,1],\qquad |h_n(u)|=|h(u)|u^{\frac{1}{n}}\leqslant|h(u)|$$

Or, par hypothèse, $u\mapsto\dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$.

Conclusion : D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^1\lim_{n\to+\infty}h_n(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^1 h(u)\,\mathrm{d}u$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}nI_n=\int_0^1\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u}$$

c) Appliquons le résultat de la question 1)b) qui précède : $f(t)=\sin(t)$ est continue, et $u\mapsto\dfrac{\sin u}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$:

$$\frac{\sin u}{u}\sim_0\frac{u}{u}=1$$

Donc $u\mapsto\dfrac{\sin u}{u}$ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable.

Ainsi, d'après 1)b), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n\int_0^1\sin(t^n)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$

De plus $\sin(u)/u\geqslant 0$, continue et non identiquement nulle sur $]0,1]$, donc son intégrale est non nulle. *(réflexe : équivalent $\longrightarrow$ est-ce que le résultat est bien non nul ?)* Conclusion :

$$\boxed{\int_0^1\sin(t^n)\,\mathrm{d}t\sim\frac{1}{n}\int_0^1\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u}$$

2) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Convergence de</u> $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u^{1-\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}u$: Pour tout $u \in [1,+\infty[$ et tout $\alpha > 0$, $u^\alpha \geqslant 1$. Donc

$$\forall u \in [1,+\infty[, \qquad \left|\frac{f(u)}{u^{1-\frac{1}{n}}}\right| \leqslant |f(u)|$$

Or f est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u^{1-\frac{1}{n}}}$ aussi.

<u>Changement de variable</u> : Effectuons le changement de variable $u = \psi(t) = t^n$.

La fonction ψ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante, bijective de $[1,+\infty[$ dans lui-même.

Donc, d'après le théorème de changement de variable, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t^n)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u^{1-\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales en cas de convergence. Or la seconde converge, donc

$$\boxed{\text{L'intégrale } A_n = \int_1^{+\infty} f(t^n)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

b) D'après ci-dessus,

$$nA_n = \int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u^{1-\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}u$$

De plus la suite de fonctions $h_n(u) = \dfrac{f(u)}{u^{1-\frac{1}{n}}}$ converge simplement vers $h(u) = \dfrac{f(u)}{u}$ sur $[1,+\infty[$, ces fonctions sont continues par morceaux, et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad ,\forall u \in [1,+\infty[, \qquad |h_n(u)| \leqslant |f(u)|$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nA_n = \int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u}$$

3) **a)** On effectue le changement de variable de la question 2)a), mais sur le segment $[1,A]$:

$$\int_1^A \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_1^{A^n} \frac{\sin u}{u^{1-\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_1^{A^n} (\sin u)u^{-1+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$$

Comme $(u^{-1+\frac{1}{n}})' = \Big(-1+\dfrac{1}{n}\Big)u^{-2+\frac{1}{n}}$, en choisissant $1-\cos$ comme primitive de sin, il vient

$$\begin{aligned}\int_1^{A^n} (\sin u)u^{-1+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u &= \Big[(1-\cos u)u^{-1+\frac{1}{n}}\Big]_1^{A^n} - \int_1^{A^n} (1-\cos u)\Big(-1+\frac{1}{n}\Big)u^{-2+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u \\ &= (1-\cos A^n)A^{-n+1} - (1-\cos 1) + \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\int_1^{A^n} \frac{1-\cos u}{u^2}u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$\boxed{C_n(A) = \frac{1}{n}\left((1-\cos A^n)A^{-n+1} - 1 + \cos 1 + \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\int_1^{A^n} \frac{1-\cos u}{u^2}u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u\right)}$$

b) Pour tout $u \in [1,+\infty[$, $\left|\dfrac{1-\cos u}{u^2}u^{\frac{1}{n}}\right| \leqslant \dfrac{2}{u^2}$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par majoration, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2}u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$ converge : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A^n} \frac{1-\cos u}{u^2}u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$ existe.

De plus, $\left|(1-\cos A^n)A^{-n+1}\right| \leqslant \dfrac{2}{A^{n-1}} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{A\to+\infty} C_n(A) \text{ existe et vaut } \frac{1}{n}\left(-1+\cos 1 + \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2}u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u\right)}$$

c) <u>Entre 1 et $+\infty$</u> : Cette intégrale converge d'après 3)b), et pour tout $n \geqslant 2$,

$$n\int_1^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = n\lim_{A\to+\infty} C_n(A) = -1+\cos 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2} u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$$

Par une convergence dominée comme au 2)b), avec pour hypothèse de domination

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall u \in [1,+\infty[, \qquad \left|\frac{1-\cos u}{u^2} u^{\frac{1}{n}}\right| \leqslant \frac{1-\cos u}{u^2}$$

Il vient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2} u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = -1+\cos 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

<u>Entre 0 et 1</u> : D'après la question 1)c), puis avec une intégration par partie comme au 3)b),

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = 1-\cos 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u}$$

Cette intégrale est aussi égale (intégration par partie dans l'autre sens) à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.