Devoir de Mathématiques numéro 1

Correction

Exercice 1 (Formule de Stirling)

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}\sqrt{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}e^{-1}\sqrt{n+1}}{(n+1)n^n\sqrt{n}} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}\right) \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1\end{aligned}$$

Or $\ln(\frac{n+1}{n}) = \ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})$ *(c'est rare, mais c'est un des cas où il faut aller à l'ordre 3 : le n dans $(n+1/2)$ va faire baisser le petit o, si on veut garder un $o(1/n^2)$ compatible avec un Riemann convergeant, il faut donc aller jusqu'à l'ordre 3)*

$$\begin{aligned}v_n &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})\right) - 1 \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o(\frac{1}{n^2}) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} - 1 \\ &= \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \\ &\sim \frac{1}{12n^2}\end{aligned}$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), par théorème de comparaison, $\sum v_n$ converge absolument donc converge :

$$\boxed{\text{La série de terme général } v_n \text{ est convergente}}$$

2) La série $\sum v_n$ est télescopique : soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} v_k &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\ln u_{k+1} - \ln u_k\right) \\ &= \ln u_n - \ln u_1 \\ &= \ln(u_n) - 1\end{aligned}$$

Or cette série converge, donc $(\ln u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
Par continuité de la fonction exponentielle,

$$\boxed{\text{la suite } u_n = e^{\ln(u_n)} \text{ converge donc aussi, vers } K = e^{\ell} > 0}$$

Comme $K > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = K$ peut s'écrire $u_n \sim K$, c'est-à-dire

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \sim K$$

La compatibilité des équivalent avec le produit nous donne

$$\boxed{n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$$

3) Intégrales de Wallis

a) $\boxed{W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t) \times (\cos^{n+1} t) \,\mathrm{d}t \\ &= \Big[(\sin t) \times (\cos^{n+1} t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)\left(-(n+1)(\sin t)(\cos^n t)\right) \,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)(\cos^n t) \,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^n t \,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n}$$

b) <u>Monotonie</u> : Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leqslant \cos t \leqslant 1$$

Donc pour tout $n \geqslant 0$, $\cos^n t \geqslant 0$ et

$$0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$$

En intégrant cet encadrement, il vient $W_{n+1} \leqslant W_n$, c'est-à-dire $\boxed{(W_n) \text{ est décroissante.}}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\cos^n t \geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale, $W_n \geqslant 0$.
De plus, $\cos t > 0$ sur $[0, \pi 2/[$ intervalle de longueur non nulle, donc $W_n \neq 0$: $W_n > 0$.
<u>Encadrement</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 3a, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$. Ainsi, puisque (W_n) est décroissante,

$$\frac{n+1}{n+2} W_n = W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$$

Puisque $W_k > 0$, il reste à diviser par W_n

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1$, par encadrement (W_{n+1}/W_n) converge vers 1. Ainsi,

$$\boxed{W_{n+1} \sim W_n}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 3b,

$$\begin{aligned} u_n &= (n+1)W_n W_{n+1} \\ &= (n+2)W_{n+2}W_{n+1} \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc (u_n) est constante. En particulier, $u_n = u_0 = \pi/2$.
Or $W_{n+1} \sim W_n$: $\pi/2 = u_n = (n+1)W_n W_{n+1} \sim nW_n^2$. Par conséquent, $W_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$ et, comme $W_n > 0$,

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

d) Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}_p : \quad W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

est vraie pour tout $p \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ D'après 1)b), $W_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0!}{(2^0 0!)^2} \dfrac{\pi}{2}$, donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_p \Longrightarrow \mathcal{H}_{p+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_p$ vraie : $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \dfrac{\pi}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} W_{2(p+1)} &= W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p} \qquad \text{(d'après 1)c))} \\ &= \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2(p+1))^2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2(p+1))!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall p \geqslant 0 \qquad W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \dfrac{\pi}{2}}$

Calcul de K : D'après 3c, $W_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$.
Or, d'après 2,

$$\begin{aligned} W_{2p} &= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &\sim \frac{K \left(\frac{2p}{e}\right)^{2p} \sqrt{2p}}{2^{2p} K^2 \left(\frac{p}{e}\right)^{2p} \times p} \times \frac{\pi}{2} \\ &\sim \frac{K 2^{2p} p^{2p} \sqrt{2p}\ e^{2p}}{e^{2p} 2^{2p} K^2 p^{2p} \times p} \times \frac{\pi}{2} \\ &\sim \frac{\pi}{K\sqrt{2p}} \end{aligned}$$

Ainsi, $K \sim \dfrac{\pi}{W_{2p}\sqrt{2p}} \sim \sqrt{\dfrac{4p}{\pi}} \times \dfrac{\pi}{\sqrt{2p}} = \sqrt{2\pi}$
Conclusion :

$$\boxed{K = \sqrt{2\pi}}$$

Exercice 2 (PT 2016) **1)** Pour tout réel x,

$$x^2 + 2\lambda x + \mu = x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda^2 + \mu = (x+\lambda)^2 - \lambda^2 + \mu$$

Posons $\alpha = \mu - \lambda^2 > 0$ et $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{\mu - \lambda^2}}$. Alors

$$x^2 + 2\lambda x + \mu = \alpha\left(\frac{1}{\alpha}(x+\lambda)^2 + 1\right) = \alpha\Big(1 + \beta^2(x+\lambda)^2\Big)$$

En conclusion, $\boxed{\alpha = \mu - \lambda^2 \text{ et } \beta = \dfrac{1}{\sqrt{\mu-\lambda^2}} \text{ vérifient } x^2 + 2\lambda x + \mu = \alpha\Big(1+\beta^2(x+\lambda)^2\Big)}$

2) Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2 + 2\lambda x + \mu)^{n+1}}$.
Comme le discriminant $\Delta = 4\lambda^2 - 4\mu < 0$ par hypothèse, $x^2 + 2\lambda x + \mu$ ne s'annule jamais et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
<u>Étude en $+\infty$</u> : $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{2n+2}}$
Or $n \geqslant 0$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2n+2}}\,\mathrm{d}x$ converge comme intégrale de Riemann ($\alpha = 2n+2 \geqslant 2 > 1$).
Donc, par équivalence, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.
<u>Étude en $-\infty$</u> : De même, $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{2n+2}}$
Or $n \geqslant 0$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|x|^{2n+2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2n+2}}\,\mathrm{d}x$ converge comme intégrale de Riemann ($\alpha = 2n+2 \geqslant 2 > 1$).
Donc, par équivalence, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.
En conclusion, $\boxed{I_n \text{ converge}}$
<u>Calcul de I_0</u> : $\dfrac{1}{x^2 + 2\lambda x + \mu} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{1 + \Big(\beta(x+\lambda)\Big)^2}$ d'après 1), avec $\alpha = \dfrac{1}{\beta^2}$. Donc

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2\lambda x + \mu} = \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta\,\mathrm{d}x}{1 + \Big(\beta(x+\lambda)\Big)^2} = \beta\Big[\operatorname{Arctan}\Big(\beta(x+\lambda)\Big)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \beta\pi$$

Conclusion : $\boxed{I_0 = \beta\pi}$

3) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u = x$ et $v = \dfrac{1}{(x^2+1)^n}$. Comme $uv \sim_\infty \dfrac{1}{x^{2n-1}}$ avec $2n - 1 > 0$, il vient

$$\lim_{x\to+\infty} uv = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} uv = 0$$

D'où l'intégration par partie suivante :

$$I_{n-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2nx^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = 2n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = \dfrac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}} = \dfrac{1}{(x^2+1)^n} - \dfrac{1}{(x^2+1)^{n+1}}$, donc

$$I_{n-1} = 2n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} - \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} \,\mathrm{d}x = 2nI_{n-1} - 2nI_n$$

Par conséquent, $\boxed{I_n = \dfrac{(2n-1)\,I_{n-1}}{2n}}$

b) *Cherchez au brouillon pour les premiers termes, comme d'habitude. Une fois que vous avez une formule bien propre, comme vous l'avez obtenu avec des « ... », il faut faire une récurrence.*

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: d'après 2), $I_0 = \beta\pi$, et ici $\beta = 1$. Ainsi $\dfrac{(2\times 0)!}{2^0(0!)^2}\pi = \pi = I_0$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. D'après a),

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n = \frac{2n(2n-1)}{2^2n^2}\,\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\pi$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi}$

c) La fonction $\varphi :]-\pi/2, \pi/2[\to]-\infty, +\infty[$, définie par $\varphi(t) = \tan t$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective. D'après le théorème de changement de variable, les intégrales suivantes sont de meme nature – convergentes d'après 2.

Comme $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ et $(1+x^2)^{n+1} = (1+\tan^2 t)^{n+1} = (1/\cos^2 t)^{n+1}$, on trouve

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2} t \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t = 2W_{2n}$$

Exercice 3

Partie 1 (Préambule)

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme $|e^{i\theta}| = 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{k}\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Or $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{k} = 0$, donc, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = 0}$$

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)\frac{\mathrm{e}^{ikt}}{ik}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\,\frac{\mathrm{e}^{ikt}}{ik}\,\mathrm{d}t \\ &= f(b)\frac{e^{ikb}}{ik} - f(a)\frac{e^{ika}}{ik} - \frac{1}{ik}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'où

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|f(b)|}{k} + \frac{f(a)}{k} + \frac{1}{k}\left|\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\right|$$

Or d'après a), $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = 0$, donc par encadrement

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = 0}$$

Partie 2

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

La fonction $f_n : \begin{cases}]0,\pi/2[& \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \dfrac{\sin(2nt)}{\tan t} \end{cases}$ est continue donc continue par morceaux sur $]0,\pi/2[$.

Étude en 0 : $f_n(t) \sim \dfrac{2nt}{t} = 2n$ ($\neq 0$ car $n \geqslant 1$). Donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} f_n(t) = 2n$ et f_n est prolongeable par continuité en $t = 0$ donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Étude en $\dfrac{\pi}{2}$: Soit $t = \dfrac{\pi}{2} - h$.

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{\pi}{2} - h\right) &= \frac{\sin(n\pi - 2nh)}{\tan(\pi/2 - h)} \\ &= (-1)^{n+1}\sin(2nh)\frac{\sin(h)}{\cos(h)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \end{aligned}$$

Donc f_n est aussi prolongeable par continuité en $t = \dfrac{\pi}{2}$, et $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Conclusion :

$$\boxed{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

b) Calculons I_1 : pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2t)}{\tan t} &= \frac{\sin(2t)\cos t}{\sin t} \\ &= \frac{2\sin t\cos^2 t}{\sin t} \\ &= 2\cos^2 t \\ &= \cos(2t) + 1 \end{aligned}$$

Donc $I_1 = \left[\dfrac{\sin(2t)}{2} + t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}$.

c) Si l'on note $\mathcal{I}m\,(z)$ la partie imaginaire d'un complexe z, on a :

$$\sin((2n+2)t) - \sin(2nt) = \mathcal{I}m\left(\mathrm{e}^{2(n+1)\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{2n\mathrm{i}t}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2(n+1)\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{2n\mathrm{i}t} &= \mathrm{e}^{(2n+1)\mathrm{i}t}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) \\ &= 2\left(-\sin((2n+1)t)\sin t + \mathrm{i}\cos((2n+1)t)\sin t\right) \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sin\left(\left(2n+2\right)t\right)-\sin\left(2nt\right)=2\cos\left(\left(2n+1\right)t\right)\sin t.}$$

d) On en déduit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, par linéarité de l'intégrale :

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos\left(\left(2n+1\right)t\right)\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Mais par un calcul analogue au précédent :

$$2\cos\left(\left(2n+1\right)t\right)\cos t=\cos\left(\left(2n+2\right)t\right)+\cos\left(2nt\right)$$

donc, comme $2n\neq 0$ et $2n+1\neq 0$,

$$I_{n+1}-I_n=\left[\frac{\sin\left(\left(2n+2\right)t\right)}{2\left(n+1\right)}+\frac{\sin\left(2nt\right)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$$

ce qui prouve que la suite $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.
Avec la question (b), on peut conclure que

$$\boxed{\text{La suite de terme général } I_n,\ n\in\mathbb{N}^*, \text{ est constante égale à } \pi/2.}$$

2) Pour p entier naturel non nul, la fonction $t\mapsto\dfrac{\sin\left(pt\right)}{t}$ est continue sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas, et se prolonge par continuité en 0 avec la valeur p.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(pt\right)}{t}\,\mathrm{d}t$ est donc convergente, car faussement généralisée.
C'est vrai notamment pour $p=2n$ avec n entier naturel non nul ou pour $p=1$.

$$\boxed{\text{Les intégrales considérées sont convergentes.}}$$

3) Comme différence de telles fonctions, φ est de classe C^1 sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

<u>Prolongement par continuité</u> :

- En $\dfrac{\pi}{2}$: Pour tout $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{\cos t}{\sin t}$.
  Donc $\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\varphi(t)=\frac{2}{\pi}$: φ se prolonge par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$ avec la valeur $\dfrac{2}{\pi}$.
- En 0 : pour tout $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$\varphi(t)=\frac{\tan t-t}{t\tan t}=\frac{t+\frac{t^3}{3}+\mathrm{o}\left(t^3\right)-t}{t\tan t}=\frac{\frac{t^3}{3}+\mathrm{o}\left(t^3\right)}{t\tan t}$$

  Ainsi $\varphi(t)\sim\dfrac{\frac{t^3}{3}}{t}^2=\dfrac{t}{3}\xrightarrow[t\to 0]{}0$: φ se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 0.

La fonction φ se prolonge en une fonction $\widetilde{\varphi}$ continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

<u>Caractère $\mathscr{C}^1$</u> : Nous allons appliquer à $\widetilde{\varphi}$ le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$ en 0 et en $\dfrac{\pi}{2}$.

Pour $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$\widetilde{\varphi}'\left(t\right)=\frac{-1}{t^2}+\frac{1+\tan^2 t}{\tan^2 t}=1+\frac{1}{\tan^2 t}-\frac{1}{t^2}.$$

- En $\dfrac{\pi}{2}$:

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\widetilde{\varphi}'\left(t\right)=1-\frac{4}{\pi^2}$$

- En 0 : $(t-\tan t) \sim -\dfrac{t^3}{3}$ et $(t+\tan t) \sim 2t$ donc

$$\frac{1}{\tan^2 t} - \frac{1}{t^2} = \frac{(t-\tan t)(t+\tan t)}{t^2\tan^2 t} \sim \frac{-\frac{t^3}{3}\times 2t}{t^4} = \frac{-2}{3}$$

donc

$$\lim_{t\to 0} \widetilde{\varphi}'(t) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée appliqué en $a=0$ et $a=\dfrac{\pi}{2}$,

$$\boxed{\text{Le prolongement } \widetilde{\varphi} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].}$$

4) Puisque $\widetilde{\varphi}$ est C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, il découle du préambule que la suite de terme général

$$\alpha_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{\varphi}(t)\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t$$

converge vers 0, et la suite extraite $(\alpha_{2n})_n$ également. Il est en de même de la suite de terme général $(\mathcal{I}m\,(\alpha_{2n}))$ car $0 \leqslant |\mathcal{I}m\,(\alpha_{2n})| \leqslant |\alpha_{2n}|$. Or

$$\mathcal{I}m\,(\alpha_{2n}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{\varphi}(t)\sin(2nt)\,\mathrm{d}t = J_n - I_n$$

donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (J_n - I_n) = 0}$$

5) **a)** La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue donc continue par morceaux sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$.

Étude en $+\infty$: Posons $u : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -\cos t$. Ce sont deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$ et telles que le produit uv admette des limites finies (nulles) aux bornes de l'intervalle.

$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[, \qquad \begin{cases} u(t) = \dfrac{1}{t} & u'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \\ v(t) = \cos t & v'(t) = -\sin t \end{cases}$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Or $|u'(t)v(t)| = \left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ donc pour $\alpha = 2$.

Donc, par théorème de majoration,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

est absolument convergente donc convergente.

Donc le théorème d'intégration par parties nous donne

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$$

b) La fonction $t \mapsto u = 2nt$ est une bijection C^1 strictement croissante de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $]0, n\pi]$, donc par théorème de changement de variable :

$$J_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, par composition de limites, on a bien :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t}$$

c) D'après la question 1.(d), on peut écrire :

$$J_n = I_n + (J_n - I_n) = \frac{\pi}{2} + (J_n - I_n)$$

donc, d'après les questions 4 et 5.(b) :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 4 (Centrale PC 2017)