Devoir de Mathématiques numéro 1

Exercice 1 (Formule de Stirling)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$.

1) Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

2) En déduire que la suite (u_n) converge, puis qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$n! \sim K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

3) (Bonus) Montrons, , grâce aux intégrales de Wallis, que $K = \sqrt{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Déterminer W_0, W_1, et, à l'aide d'une intégration par parties,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

b) Montrer que (W_n) est décroissante, en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$ puis que

$$W_{n+1} \sim W_n$$

c) Montrer que la suite définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (n+1)W_n W_{n+1}$ est constante. En déduire un équivalent de W_n.

d) Montrer par récurrence que, pour tout $p \geqslant 0$, $W_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\binom{2p}{p}}{4^p}$. En déduire

$$K = \sqrt{2\pi}$$

Exercice 2

Soient λ et μ deux réels, $\mu \neq 0$, tels que : $\lambda^2 - \mu < 0$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + 2\,\lambda\, x + \mu)^{n+1}}$$

1) Montrer qu'il existe deux réels α et β, que l'on exprimera en fonction de λ et μ, tels que, pour tout réel x : $x^2 + 2\,\lambda\, x + \mu = \alpha\left(1 + \beta^2\,(x+\lambda)^2\right)$.

2) Pour tout entier naturel n, étudier la convergence de I_n. Que vaut I_0 ?

3) On se place, dans ce qui suit, dans le cas $\lambda = 0$, $\mu = 1$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \dfrac{2n-1}{2n} I_{n-1}$.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer I_n en fonction de n (on donnera la réponse à l'aide de factorielles).

c) À l'aide du changement de variable $x = \tan t$, que l'on justifiera, montrer que I_n est une intégrale de Wallis (définies à l'exercice 1).

Exercice 3

Partie 1 (Préambule)
On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction f, de classe C^1 sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1) Déterminer $\displaystyle\lim_{k\to+\infty,\, k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}t$.

2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{N}} \int_a^b f(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\, \mathrm{d}t = 0.$$

Partie 2
Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}\,\mathrm{d}t \quad , \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1) **a)** Étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de l'intégrale I_n.

b) Déterminer I_1.

c) Exprimer, pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et tout entier naturel non nul n, la quantité :

$$\sin((2n+2)\,t) - \sin(2nt)$$

en fonction de $\cos((2n+1)\,t)$ et $\sin t$.

d) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante (on précisera la valeur prise par les termes de cette suite).

2) Étudier la convergence des intégrales J_n, $n\in\mathbb{N}^*$, et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

3) Montrer que la fonction φ qui, à tout réel t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, associe

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\tan t}$$

est prolongeable en une fonction $\widetilde{\varphi}$ de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4) Que vaut : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (J_n - I_n)$? On pensera à utiliser le préambule.

5) **a)** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

(on pourra utiliser un changement de variable).

c) Déterminer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4 (Centrale — pour les élèves concernés)

L'objet du problème est une étude de la vitesse de convergence de suites réelles.
On utilisera les notations suivantes :

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel des suites définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles ;
- E désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes telles que
$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant N,\ u_k \neq \lim_{n\to\infty} u_n$$
- à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E et de limite égale à ℓ, on associe la suite $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang par
$$u_n^c = \left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right|$$
- E^c désigne l'ensemble des éléments $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telles que $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente ;
- soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E^c et soit ℓ^c la limite de $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$; on dit que la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
  - lente si $\ell^c = 1$,
  - géométrique de rapport ℓ^c si $\ell^c \in \,]0,1[$,
  - rapide si $\ell^c = 0$;
- soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E et de limite égale à ℓ, et soit r un réel strictement supérieur à 1 ; on dit que la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est d'ordre r si la suite définie à partir d'un certain rang par $\dfrac{u_{n+1}-\ell}{|u_n-\ell|^r}$ est bornée ;
- on rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n = u_{n_0}$.

1) Des résultats généraux.

a) Montrer que l'ensemble E^c est non vide.

b) L'ensemble E^c est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

c) Montrer que E^c est strictement inclus dans E.

d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E^c. Montrer que ℓ^c appartient au segment $[0,1]$.

2) Exemples de calcul de vitesse de convergence.

a) Soit k un entier strictement positif et q un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. Montrer que les suites $\left(\dfrac{1}{(n+1)^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(n^k q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E^c et donner leur vitesse de convergence.

b) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n}$.

i) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $v_n = e - \dfrac{e}{2^{n+1}} + o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

ii) Montrer que la suite (v_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

c) On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

i) Montrer que la suite (I_n) est bien définie et appartient à E.

ii) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la suite (I_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

d) Soit α un réel strictement supérieur à 1. La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge vers un réel que l'on notera ℓ. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $S_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1, S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$.

i) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \ell - S_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

ii) En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

3) Vitesse de convergence d'ordre r d'une suite réelle.

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E dont la vitesse de convergence est d'ordre r, où r est un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rapide.

b) **i)** Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est un élément de E. On note s la limite de cette suite.

ii) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant s - S_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$.

iii) En déduire que la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rapide.

iv) Soit r un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers s n'est pas d'ordre r.

c) On considère I un intervalle réel de longueur strictement positive, f une application définie sur I à valeurs dans I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément ℓ de I et que f est dérivable en ℓ.

i) Montrer que $f(\ell) = \ell$.

ii) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire alors elle appartient à E^c. Donner sa vitesse de convergence en fonction de $f'(\ell)$.

iii) Montrer que si $|f'(\ell)| > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

iv) Soit r un entier supérieur ou égal à 2. On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^r$ sur I et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire. Montrer que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est d'ordre r si et seulement si $\forall k \in \{1, 2, \ldots, r-1\},\ f^{(k)}(\ell) = 0$.