 

# Devoir de Mathématiques numéro 1

---

## Exercice 1

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

**1)** **a)** Montrer que : $\forall t \in ]-1,+\infty[,\ \ln(1+t) \leqslant t$.

**b)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que, pour tout réel $x \in [0, \sqrt{n}]$,

$$\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \leqslant \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

L'inégalité de droite est-elle encore vraie sur $\mathbb{R}_+$ ?

**c)** Dans cette question, on suppose $x$ fixé dans $\mathbb{R}_+$. Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

**d)** Montrer que pour tout réel positif $x$ :

$$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$

**2)** **a)** Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ et calculer sa valeur.

**b)** En déduire la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ ainsi que la majoration

$$I \leqslant \frac{\pi}{2}$$

**3)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose désormais

$$u_n = \int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x, \qquad I_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad v_n = \int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}x$$

**a)** Montrer la convergence des intégrales généralisées $v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**b)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n \leqslant I_n \leqslant v_n$$

**4)** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t$. On admet le résultat $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. Vous êtes vivement encouragé à revoir l'étude des intégrales de Wallis faite en PCSI.

**a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}\sin t$, exprimer $u_n$ en fonction de $W_{2n+1}$.

**b)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}\tan t$, exprimer $v_n$ en fonction de $W_{2n-2}$.
Indication : *On rappelle la relation* $\cos^2 t = \dfrac{1}{1+\tan^2 t}$.

**5)** En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

## Exercice 2 (D'après Mines-Ponts)

**Partie 1** (Exponentielle tronquée)

Pour tout $x$ réel strictement positif et $n$ entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}$$

On admet que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $e^u = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$.

**1)** Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, puis la relation $n! = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**2)** Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$ ?

**3)** Pour une fonction $f$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ définie sur un intervalle $I$ contenant 0, la formule de Taylor avec reste intégral en 0 s'écrit :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

**a)** Montrer par récurrence cette formule.

**b)** En appliquant cette formule à la fonction $x \mapsto e^{nx}$, prouver à l'aide d'un changement de variable la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u$$

**4)** **a)** Soit $M > 0$. On pose $a_n = \dfrac{n^{n+1}}{n!} M^n$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

**b)** (5/2 — pour les 3/2, admettre le résultat) Montrer que, si $0 < M < e^{-1}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

**c)** On suppose dans cette question que $x \in ]0,1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto ue^{-u}$ admet, sur $[0,x]$, un maximum $M$ tel que $M < e^{-1}$.

**d)** En déduire que lorsque $n \to +\infty$,

$$R_n(x) = o(e^{nx}) \qquad \text{puis} \qquad T_n(x) \sim e^{nx}$$

**5)** Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer l'identité suivante à l'aide du résultat de la question 1 :

$$T_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u$$

**6)** Montrer que, pour $x > 1$ et pour tout $u \geqslant x$,

$$(ue^{-u})^n \leqslant (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u}$$

**7)** En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = o(e^{nx})$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Partie 2** (Méthode de Laplace)

Soit $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

**H1** : $f(0) = 1$

**H2** : $f''(0) = -1$

**H3** : Pour tout $x \in ]-1,1[\setminus\{0\}$ $\;0 < f(x) < 1$

**H4** : les nombres $f(-1)$ et $f(1)$ appartiennent à l'intervalle $[0,1[$.

Pour $x \in ]-1,1[\setminus\{0\}$, on pose

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2} \ln\big(f(x)\big).$$

**1)** Par une étude de fonction, montrer que $f'(0)=0$. Puis, à l'aide d'un développement limité, déterminer $k=\lim_{x\to 0}\varphi(x)$.

On prolonge $\varphi$ en posant $\varphi(0)=k$.

**2)** Montrer que la fonction $\varphi$, sur $]-1,1[$, est minorée par un réel strictement positif. En déduire l'existence d'un réel $a$ strictement positif tel que pour tout $x\in[-1,1]$, on ait

$$f(x)\leqslant e^{-ax^2}.$$

*Indication : on pourra distinguer les cas où $f(1)$ et $f(-1)$ sont non nuls des cas où l'un des deux au moins est nul.*

Pour tout $n$ entier naturel non nul, on définit une fonction $g_n:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ par

$$g_n(u)=\begin{cases}\left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n & \text{si } u\in[-\sqrt{n},\sqrt{n}]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

**3)** Montrer que chaque fonction $g_n$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et que la suite de fonctions $(g_n, n\geqslant 1)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $g$ telle que pour tout $u\in\mathbb{R}$,

$$g(u)=e^{-u^2/2}.$$

**4)** À l'aide de l'exercice 1, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t=\sqrt{2\pi}.$$

**5)** En déduire que

$$\int_{-1}^{1}(f(x))^n\ \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

On en déduit de la même manière que

$$\int_{0}^{1}(f(x))^n\ \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \tag{1}$$

**Partie 3** (Formule de Stirling)

Avertissement : même si elle fait partie du programme, on (re)démontre dans cette partie la formule de Stirling.

**1)** Pour tout entier $n\geqslant 1$, déduire de la question 5 que

$$n!=n^{n+1}e^{-n}(I_n+J_n),$$

avec

$$I_n=\int_{-1}^{1}(x+1)^n e^{-nx}\ \mathrm{d}x \text{ et } J_n=\int_{1}^{+\infty}(x+1)^n e^{-nx}\ \mathrm{d}x.$$

**2)** Montrer que pour tout $x\geqslant 1$, $x+1\leqslant 2^x$. En déduire une majoration de $J_n$.

**3)** En appliquant la méthode de Laplace, donner un équivalent de $I_n$.

**4)** En déduire que

$$n!\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$