

Devoir de Mathématiques numéro 1

Correction

Exercice 1 (D'après TPC 2019)

1) a) Pour tout $t \in]-1, +\infty[$, posons $\varphi(t) = \ln(1+t) - t$.

$$\forall t \in]-1, +\infty[, \quad \varphi'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t}$$

Donc $\varphi'(t)$ est du signe de $-t$, et le tableau de variations de φ s'écrit

x	-1	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$	0	$-$
φ			

Ainsi, $\varphi \leq 0$ et en conclusion :

$$\forall t \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+t) \leq t$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Première inégalité : Soit $x \in [0, \sqrt{n}]$.

Comme $-\frac{x^2}{n} \in]-1, 0] \subset]-1, +\infty[$, l'inégalité de la question 1 s'applique et nous donne

$$\begin{aligned} & \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq -\frac{x^2}{n} \\ \Rightarrow & n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq -x^2 && \text{Car } n > 0 \\ \Rightarrow & e^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)} = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} && \text{Car } \exp \text{ est croissante} \end{aligned}$$

Cette inégalité reste vraie pour $x = \sqrt{n}$: $0 \leq e^{-n}$.

Seconde inégalité : Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comme $\frac{x^2}{n} \geq 0$, l'inégalité de la question 1 s'applique et nous donne de même

$$\begin{aligned} & \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) \leq \frac{x^2}{n} \\ \Rightarrow & -n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) \geq -x^2 \\ \Rightarrow & e^{-n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)} = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \geq e^{-x^2} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in [0, \sqrt{n}], \quad \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}}$$

L'inégalité de droite est encore vraie sur $\mathbb{R}_+$.

c) *C'est quasiment une des questions de cours. Nous verrons au chapitre suivant que c'est un résultat de convergence simple.*

- Pour n assez grand, $1 - \frac{x^2}{n} > 0$, donc on peut écrire

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n &= e^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)} \\ &= e^{n\left(-\frac{x^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} && \text{Développement limité de } \ln(1 - u) \\ &= e^{-x^2 + o(1)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{-x^2}}$$

- De même, comme $1 + \frac{x^2}{n} > 0$,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} &= e^{-n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)} \\ &= e^{-n\left(\frac{x^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} && \text{Développement limité de } \ln(1 + u) \\ &= e^{-x^2 + o(1)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} = e^{-x^2}}$$

d) *Comment commencer ? D'abord, les fractions, c'est le Mal : partir du résultat et essayer d'obtenir une expression sans fractions, autant que possible. Ensuite, on peut tout passer d'un côté et se ramener à une étude de signe. Puis on rédige tout ça dans le bon ordre : la conclusion en dernier.*

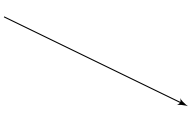
Posons, pour tout $x \geq 0$,

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n$$

La fonction φ est dérivable,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= 2x - 2x \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{n-1} \\ &= 2x \left(1 - \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Pour $x > 0$, $1 + \frac{x^2}{n} > 1$ donc la parenthèse est négative, et le tableau de variation de φ s'écrit

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	0	—
φ	0	

Donc pour tout $x \geq 0$, $\varphi(x) \leq 0$. Ainsi,

$$0 < 1 + x^2 \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n$$

En passant à l'inverse, il vient,

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1 + x^2}$$

On peut aussi utiliser, en étant moins systématique, la formule du binôme,

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n = 1 + x^2 + \underbrace{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x^2}{n}\right)^k}_{\geq 0} \geq 1 + x^2$$

2) a) Pour tout $X > 0$, $\int_0^X \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arctan } X \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{2}$$

b) D'après 1)b) et 1)d),

$$\forall x > 0, \quad 0 < e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

Or d'après a), l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ converge. Donc, par majoration,

$$\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ converge}$$

De plus, en intégrant l'inégalité précédente et vu le calcul du a),

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. La fonction $f : x \mapsto \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. De plus, $f \geq 0$.

Étude en $+\infty$: $1 + \frac{x^2}{n} \sim \frac{x^2}{n}$, donc (*J'insiste : n fixé*)

$$f(x) \sim \frac{(x^2)^{-n}}{n^{-n}} = \frac{n^n}{x^{2n}}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2n}} dx$ converge (Riemann, $2n \geq 2 > 1$),

Donc, par comparaison,

Les intégrales généralisées $v_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$ convergent

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En intégrant l'encadrement obtenu en 1)b) entre 0 et $\sqrt{n}$, il vient

$$\underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx}_{u_n} \leq \underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx}_{I_n} \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$$

Or $\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \geq 0$ sur $[\sqrt{n}, +\infty[$. Donc $\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx \geq 0$, puis

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx = v_n$$

Conclusion :

$$u_n \leq I_n \leq v_n$$

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuons le changement de variables $x = \sqrt{n} \sin t$: La fonction $t \mapsto \sqrt{n} \sin t$ est strictement croissante de $[0, \pi/2]$ dans $[0, \sqrt{n}]$, et $dx = \sqrt{n} \cos t dt$.

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{(\sqrt{n} \sin t)^2}{n}\right)^n (\sqrt{n} \cos t) dt \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)^n \cos t dt \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt \end{aligned}$$

Conclusion :

$$u_n = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Attention, intégrale généralisée : théorème de changement de variables à invoquer.*

La fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{n} \tan t$ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante (donc bijective) de $[0, \pi/2[$ dans $[0, +\infty[$. De plus, $\varphi'(t) = \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 t}$.

Donc, d'après le théorème de changement de variable, les intégrales $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$ et

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{(\sqrt{n} \tan t)^2}{n}\right)^{-n} \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 t} dt$ sont de même nature, donc convergentes puisque la première l'est d'après 3)a), et

$$\begin{aligned} v_n &= \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{(\sqrt{n} \tan t)^2}{n}\right)^{-n} \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 t} dt \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \tan^2 t)^{-n} \frac{1}{\cos^2 t} dt & \text{Or } 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} = \tan' t \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{-n} \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t dt \end{aligned}$$

Conclusion :

$$v_n = \sqrt{n}W_{2n-2}$$

5) L'énoncé nous rappelle que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, donc

$$W_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

D'où $u_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après 4)a), et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

De même, $W_{2n-2} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, donc, d'après 4)b),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ainsi, grâce à l'encadrement obtenu en 3)b), la suite (I_n) converge vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. D'où

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 2 (E3A PSI 2016)

1) On utilise la factorisation par l'angle moitié

$$\begin{aligned} u &= e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) \\ &= 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= -2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\pi} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{'(utile si } \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0) \end{aligned}$$

Ainsi $|u| = 2 \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|$

Si $|u| \neq 0$, c'est-à-dire $\theta \neq \pi$, l'argument existe et

$$\arg u = \begin{cases} \frac{\theta}{2} [2\pi] & \text{si } \theta \in [0, \pi[\\ \pi + \frac{\theta}{2} [2\pi] & \text{si } \theta \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

2) a) Etude des cas $n = 1$ et $n = 2$ On rappelle la factorisation suivante – toujours la série géométrique :

$$(X^n - 1) = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1)$$

D'où l'on déduit, via $X = a/b$,

$$(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

i) On pouvait aussi utiliser le binôme de Newton pour $n = 3$ et $n = 5$, en calculant les coefficients du binôme à l'aide du triangle de Pascal.

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2i} \left((X+i)^3 - (X-i)^3 \right) \\ &= \frac{1}{2i} (X+i - X+i) ((X+i)^2 + (X+i)(X-i) + (X-i)^2) \\ &= (X^2 + 2i - 1) + (X^2 + 1) + (X^2 - 2i - 1) \\ &= 3X^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= \frac{1}{2i} \left((X+i)^5 - (X-i)^5 \right) \\
&= \frac{1}{2i} (X+i - X+i) \left[(X+i)^4 + (X+i)^3(X-i) + ((X+i)(X-i))^2 \right. \\
&\quad \left. + (X+i)(X-i)^3 + (X-i)^4 \right] \\
&= 2\Re \left((X+i)^4 + (X+i)^3(X-i) \right) + (X^2+1)^2 \\
&= 2X^4 - 12X^2 + 2 + 2(X^2-1)(X^2+1) + X^4 + 2X^2 + 1 \\
&= 5X^4 - 10X^2 + 1
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P_1 = 3X^2 - 1 \text{ et } P_2 = 5X^4 - 10X^2 + 1}$

ii) Comme P_1 est de degré 2 et P_2 de degré 4, $\boxed{P_1 \in \mathbb{R}_2[X] \text{ et } P_2 \in \mathbb{R}_4[X]}$

Un polynôme irréductible est un polynôme qui ne peut pas s'écrire comme un produit de polynôme non constants de degré plus petit.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ou les polynômes de degré 2 sans racines réelles. Par exemple, un polynôme de degré 4 sans racines réelles aura 4 racines complexes $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$, et en regroupant les racines conjuguées on l'écrit comme un produit de polynômes de degré 2.

Ainsi P_2 n'est pas irréductible car il est de degré 4, et $P_1 = (\sqrt{3}X - 1)(\sqrt{3}X + 1)$ donc n'est pas irréductible non plus.

Conclusion : $\boxed{P_1 \text{ et } P_2 \text{ ne sont pas irréductibles}}$

b) Cas général

i) P_n est différence de deux polynômes de degré $2n+1$ et est donc de degré au plus $2n+1$ (c'est-à-dire dans $\mathbb{C}_{2n+1}[X]$).

On développe à l'aide de la formule du binôme, en ne gardant que les termes de plus haut degré :

$$\begin{aligned}
P_n(X) &= \frac{1}{2i} \left(X^{2n+1} + \binom{2n+1}{1} X^{2n} + R_1(X) \right) && \text{avec } \deg R_1 < 2n \\
&\quad + \left(X^{2n+1} - \binom{2n+1}{1} X^{2n}(-i) + R_2(X) \right) && \text{avec } \deg R_2 < 2n \\
&= (2n+1)X^{2n} + \frac{1}{2i}(R_1(X) - R_2(X))
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\deg \frac{1}{2i}(R_1(X) - R_2(X)) < 2n$,

$\boxed{P_n \text{ est de degré } 2n \text{ et son coefficient dominant est } 2n+1}$

ii) Les racines N -ièmes de l'unité sont les complexes

$$\boxed{e^{\frac{2ik\pi}{N}} \quad \text{avec} \quad k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$$

iii) On a

$$\boxed{P_n(i) = \frac{(2i)^{2n+1}}{2i} = 2^{2n}(-1)^n}$$

iv) Soit $a \in \mathbb{C}$. En remplaçant P_n par son expression il vient

$$\begin{aligned}
P_n(a) = 0 &\iff (a+i)^{2n+1} - (a-i)^{2n+1} = 0 \\
&\iff (a+i)^{2n+1} = (a-i)^{2n+1}
\end{aligned}$$

Puis, en passant au module,

$$\begin{aligned} P_n(a) = 0 &\implies |a + i|^{2n+1} = |a - i|^{2n+1} \\ &\implies |a + i| = |a - i| \end{aligned}$$

La dernière égalité signifie, géométriquement, que le point d'affixe a est équidistant des points d'affixes i et $-i$. Donc, en identifiant affixes et points, les racines sont sur la médiatrice du segment $[i, -i]$, c'est-à-dire l'axe des réels. Conclusion :

Les racines de P_n sont réelles

v) $\implies$ Supposons que a soit racine de P_n . D'après iii), $P(i) \neq 0$ donc $a \neq i$, et

$$\left(\frac{a+i}{a-i}\right)^{2n+1} = 1$$

*Lorsqu'on voit une barre de fraction, il faut que ce soit un réflexe : le dénominateur peut-il s'annuler ?
Ce qui nous donne la raison d'être de la question iii.*

Ainsi, $\frac{a+i}{a-i}$ est une racine $2n+1$ -ième de l'unité. D'après ii, il existe $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ tel que

$$\frac{a+i}{a-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$$

et donc, en développant,

$$a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$$

Il reste à écarter le cas $k = 0$: l'égalité précédente s'écrirait $a \times 0 = 2i$, ce qui est faux. Donc $k \neq 0$: $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$.

$\Longleftarrow$ Réciproquement, si $a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$ avec $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on a

$$(a+i) = (a-i)e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$$

En élevant à la puissance $2n+1$ on trouve que $(a+i)^{2n+1} = (a-i)^{2n+1}$ et donc que $P_n(a) = 0$.
Conclusion :

$$a \text{ est racine de } P_n \iff \exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$$

vi) D'après v), comme $e^{2ik\pi/(2n+1)} \neq 1$, les racines de P_n sont les

$$a_k = \frac{i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)}{(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1)} = i \frac{2 \cos(k\pi/(2n+1))}{2i \sin(k\pi/(2n+1))} = \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

pour $k = 1, \dots, 2n$. On trouve bien des racines toutes réelles.

Pour l'instant on connaît pas la multiplicité des racines : ces racines ne sont pas forcément distinctes.

vii) On développe les deux puissances par formule du binôme et on regroupe les termes :

$$2iP_n(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k i^{2n+1-k} (1 - (-1)^{2n+1-k})$$

Les termes d'indice k impairs sont nuls : $1 - (-1)^{2n+1-k} = 0$ dans ce cas. Il reste donc

$$\begin{aligned} 2iP_n(X) &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} X^{2k} i^{2n+1-2k} \\ &= 2i \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} X^{2k} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$P_n(X) = Q_n(X^2) \quad \text{avec} \quad Q_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} X^k$$

viii) 2.a.i donne

$$Q_1 = 3 \left(X - \frac{1}{3} \right) \text{ racine : } \frac{1}{3}$$

et

$$Q_2 = 5X^2 - 10X + 1 = 5 \left(X - \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \right) \left(X - \frac{5-2\sqrt{5}}{5} \right) \text{ racines : } \frac{5-2\sqrt{5}}{5}, \frac{5+2\sqrt{5}}{5}$$

Savoir repérer ce genre de questions, qui portent sur des objets simples que vous avez forcément calculé.

ix) Si a est racine de P_n alors a^2 est racine de Q_n . En particulier, on a les racines

$$a_k^2 = \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \quad \text{avec } k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$$

Notons $Z(P)$ l'ensemble des racines – aussi appelées « zéros » – de P . La relation $P_n(X) = Q_n(X^2)$ entraîne

$$\{a^2 \mid a \in Z(P_n)\} \subset Z(Q_n)$$

Mais l'inclusion inverse n'est vraie que parce que l'on est dans $\mathbb{C}$: toute racine $b \in Z(P_n)$ peut s'écrire $b = a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$, et donc provient d'une racine $a \in Z(Q_n)$. Ce n'est a priori plus vrai sur $\mathbb{R}$.

$\deg P = 2n$ donc $\deg Q = n$: il nous faut n racines (comptées avec multiplicité).

Or $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$ est bijective de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$ et les $2k\pi/(2n+1)$ étant dans $]0, \pi[$, les a_k sont 2 à 2 distincts. De plus, $a_k \geq 0$ pour $\frac{k\pi}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Les carrés sont donc aussi distincts : Ceci donne n racines distinctes de Q_n qui est de degré n et donc toutes ses racines.

$$\text{Les racines de } Q_n \text{ sont les } b_k = a_k^2 = \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \text{ pour } k \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

Les racines de Q_n sont toutes de multiplicité 1.

3) Le coefficient dominant de Q_n est celui de P_n , $2n+1$. $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$, or Q_n est scindé à racines simples et s'écrit

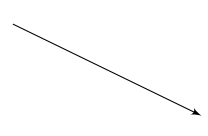
$$\begin{aligned} Q_n &= (2n+1) \prod_{k=1}^n (X - b_k) \\ &= (2n+1) \left(X^n - \sum_{k=1}^n b_k X^{n-1} + \dots + (-1)^n b_1 \dots b_n \right) \quad (\text{en développant}) \end{aligned}$$

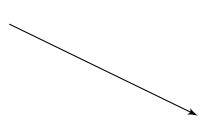
On voit que l'on a besoin du coefficient de X^{n-1} dans Q_n qui vaut d'après viii $-\binom{2n+1}{2n-2}$. On a ainsi

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{2n-2} \\ &= \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{3} \\ &= \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6(2n+1)} \\ S_n &= \boxed{\frac{n(2n-1)}{3}} \end{aligned}$$

4) Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, posons $f(x) = \sin(x) - x$ et $g(x) = x - \tan(x)$.

Ce sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et $f'(x) = \cos(x) - 1$ et $g'(x) = -\tan^2(x)$ sur l'intervalle. Donc

x	0	$\pi/2$
$f'(x)$	0	—
f	0	

x	0	$\pi/2$
$g'(x)$	0	—
g	0	

Comme $\sin \geq 0$ sur $[0, \pi]$, nous avons

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

De plus, en excluant 0, tout est strictement positif. Or $y \mapsto \frac{1}{y^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc

$$\forall x \in]0, \pi/2[, \frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

Obtenir la seconde série d'inégalité est faisable : il faut écrire ce qu'on a, ce qu'on veut, et essayer de passer de l'un à l'autre. Sans a priori et en justifiant à chaque étape.

- 5) Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \pi/2[$ d'après le calcul du 2.ix. Toujours vérifier les hypothèses avant d'appliquer un résultat.

En remplaçant x par $\frac{k\pi}{2n+1}$ et en sommant, les inégalités qui précèdent s'écrivent :

$$S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leq n + S_n$$

ce qui donne

$$\frac{\pi^2 S_n}{(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2(n + S_n)}{(2n+1)^2}$$

Or $S_n = \frac{n(2n-1)}{3} \sim \frac{2}{3}n^2$. Donc $S_n + n \sim S_n$ et

$$\frac{\pi^2 S_n}{(2n+1)^2} \sim \frac{\pi^2}{4n^2} \times \frac{2n^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$

Les deux coté de l'encadrement de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ ont donc même limite, $\frac{\pi^2}{6}$: par théorème d'encadrement, la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge (ce que l'on sait car c'est une série de Riemann convergente) et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$