Lycée St Joseph
Classe de PC

Pour le jeudi 26 septembre 2019

Devoir de Mathématiques numéro 1

Exercice 1

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

1) **a)** Montrer que : $\forall t \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+t) \leqslant t$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que, pour tout réel $x \in [0, \sqrt{n}]$,

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

L'inégalité de droite est-elle encore vraie sur $\mathbb{R}_+$?

c) Dans cette question, on suppose x fixé dans $\mathbb{R}_+$. Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

d) Montrer que pour tout réel positif x :

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$

2) **a)** Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ et calculer sa valeur.

b) En déduire la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ ainsi que la majoration

$$I \leqslant \frac{\pi}{2}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose désormais

$$u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x, \qquad I_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad v_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x$$

a) Montrer la convergence des intégrales généralisées v_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n \leqslant I_n \leqslant v_n$$

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t$. On admet le résultat $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. Vous êtes vivement encouragé à revoir l'étude des intégrales de Wallis faite en PCSI.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}\sin t$, exprimer u_n en fonction de W_{2n+1}.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}\tan t$, exprimer v_n en fonction de W_{2n-2}.
Indication : *On rappelle la relation* $\cos^2 t = \dfrac{1}{1+\tan^2 t}$.

5) En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul.

1) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Déterminer, s'ils existent, module et argument du nombre complexe $u = 1 + e^{i\theta}$.

2) On note P_n le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right)$$

a) <u>Etude des cas $n = 1$ et $n = 2$</u>

i) Déterminer les polynômes P_1 et P_2.

ii) Vérifier que $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et que $P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$. Sont-il irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$?

b) <u>Cas général</u>

i) Montrer que $P_n \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. Donner son degré et son coefficient dominant.

ii) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression des racines N-ièmes de l'unité.

iii) Calculer $P_n(i)$.

iv) Prouver par un argument géométrique que les racines de P_n sont réelles.

v) Soit $a \in \mathbb{C}$. prouver l'équivalence

$$a \text{ est racine de } P_n \iff \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$$

vi) Déterminer les racines du polynôme P_n. Vérifier alors le résultat de 2.b.iv.

vii) En développant P_n, déterminer un polynôme Q_n de degré n et à coefficients réels tel que

$$P_n(X) = Q_n(X^2)$$

On admettra l'unicité du polynôme Q_n ainsi obtenu.

viii) Expliciter Q_1 et Q_2 et déterminer leurs racines respectives.

ix) Déterminer les racines de Q_n en fonction de celles de P_n.

3) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$. En utilisant des résultats obtenus à la question précédente, montrer que $S_n = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.

4) Illustrer graphiquement les inégalités suivantes que l'on admettra

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$$

En déduire que

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

5) Justifier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ et calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.