

Devoir de Mathématiques numéro 1

Correction

Exercice 1 (E3A MP, 2018)

1) La fonction $\ln$ est définie sur $]0, +\infty[$, donc

La fonction $(x \mapsto x + \ln(1 - x))$ a pour domaine de définition $] -\infty, 1[$

De plus, $\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc

$$x + \ln(1 - x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

2) Posons $g(x) = x + \ln(1 - x)$ pour $x \in] -\infty, 1[$.

$$\forall x \in] -\infty, 1[, \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{1 - x} = -\frac{x}{1 - x}$$

Nous obtenons donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	1
$g'(x)$	$+$	0	$-$
g	$-\infty$	0	$-\infty$

Ainsi, pour $n \geq 2$, $u_n = g\left(\frac{1}{n}\right) \geq g(0) = 0$. Conclusion :

$$u_1 = 1 \geq 0 \text{ et } \forall n \geq 2, u_n \leq 0.$$

Pour étudier un signe, faire au besoin une étude de la fonction sous-jacente.

3) D'après 1, pour tout $n \geq 2$, $u_n = g\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ Par conséquent,

$$|u_n| \sim \frac{1}{2n^2}$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par comparaison, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente :

La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente.

4) Pour $x \in [0, 1]$, $1 + x > 0$ donc f est bien définie, et $\mathcal{C}^1$. De plus,

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Ainsi,

x	0	1
$f'(x)$	0	+
f	0	$1 - \ln 2$

5) Pour tout $n \geq 1$, $v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$$|v_n| \sim \frac{1}{2n^2}$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par comparaison, $\sum v_n$ est absolument convergente, donc convergente :

La série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est convergente.

6) Pour $n = 1$,

$$v_1 - u_1 = 1 - 1 = -\ln 2$$

Pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$v_n - u_n = -\ln(n-1) + 2\ln(n) - \ln(n+1)$$

Ainsi, comme $v_1 - u_1 = 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (v_n - u_n) &= -\ln 2 + \sum_{n=2}^N -\ln(n-1) + 2\ln(n) - \ln(n+1) \\ &= -\ln 2 - \sum_{n=2}^N \ln(n-1) + 2 \sum_{n=2}^N \ln(n) - \sum_{n=2}^N \ln(n+1) \\ &= -\ln 2 - \sum_{n=1}^{N-1} \ln(n) + 2 \sum_{n=2}^N \ln(n) - \sum_{n=3}^{N+1} \ln(n) \\ &= -2\ln 2 + 2\ln 2 + 2\ln N - \ln N - \ln(N+1) \\ &= \ln N - \ln(N+1) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\sum_{n=1}^N (v_n - u_n) = -\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)$$

7) Posons $U_N = \sum_{n=1}^N u_n$ et $V_N = \sum_{n=1}^N v_n$ pour $N \in \mathbb{N}^*$.

- D'après 6, $\lim_{N \rightarrow +\infty} V_N - U_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} -\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) = 0$.
- Pour $N \geq 1$, $U_{N+1} - U_N = u_{N+1} \leq 0$, donc (U_N) est décroissante.
- Pour $N \geq 1$, $V_{N+1} - V_N = v_{N+1} = f(1/n) \geq 0$ d'après 4, donc (V_N) est croissante.

En conclusion, Les suites $(\sum_{n=1}^N v_n)_{N \in \mathbb{N}^*}$ et $(\sum_{n=1}^N u_n)_{N \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes

En particulier, $\sum_{n \geq 1} v_n = \sum_{n \geq 1} u_n$

8) Comme (U_N) est décroissante, $U_N \geq \lim_{N \rightarrow +\infty} U_N = \gamma$ pour tout $N \geq 1$. En particulier pour $N = 2$:

$$\gamma \leq U_2 = u_1 + u_2 < u_1 = 1$$

De même, (V_n) est croissante, donc $V_1 = 1 - \ln 2 \leq \gamma$. Or $1 - \ln 2 > 0$. En conclusion :

$$\gamma \in]0, 1[$$

Exercice 2 (Centrale TSI)

Partie 1 (Fonctions homographiques)

- 1) a) i) À l'intérieur de son disque de convergence $] -R, R[$, la série entière y est $\mathcal{C}^\infty$ et dérivable terme à terme. On dérive puis on remplace dans (E_a) : pour tout $x \in] -R, R[$,

$$\begin{aligned} (x-a)y'' + 2y' &= (x-a) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} a n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} a(n+1)n a_{n+1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} \\ &= -2a a_2 + 2a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} [n(n-1)a_n - a(n+1)n a_{n+1} + 2n a_n] x^{n-1} \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, il vient donc

$$\begin{cases} -2a a_2 + 2a_1 &= 0 \\ \forall n \geq 2 \quad n(n-1)a_n - a(n+1)n a_{n+1} + 2n a_n &= 0 \end{cases}$$

Après simplifications, on trouve la suite géométrique $\forall n \geq 1 \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{a}$, l'expression en fonction de n étant $\forall n \geq 1 \quad a_n = \frac{a_1}{a^{n-1}}$.

pour tout $x \in] -R, R[$, $y(x) = a_0 + a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n-1}} = a_0 - a_1 a + a_1 a \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n$.

On reconnaît la somme de la série géométrique :

$$\forall x \in] -R, R[\quad y(x) = a_0 - a_1 a + \frac{a_1 a}{1 - x/a}$$

On a donc nécessairement $|x/a| < 1$, donc $R \leq a$.

- ii) Les fonction $y(x) = a_0 - a_1 a + \frac{a_1 a}{1 - x/a}$ sont développables en série entière sur $] - a, a[$ (car $|x/a| < 1$), et solutions de (E_a) d'après la question précédentes.
- iii) Notons $\mathcal{S}_{]-a,a[}$ l'ensemble des fonctions trouvées au ii. Par construction, $\mathcal{S}_{]-a,a[} = \text{Vect}(f_1, f_2)$ avec, pour tout $x \in] - a, a[$, $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = -a + \frac{a}{1 - x/a}$.

C'est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur $] - a, a[$. De plus la famille (f_1, f_2) est libre (f_2 n'est pas constante, donc pas colinéaire à f_1).

En conclusion, $\mathcal{S}_{]-a,a[}$ est un espace vectoriel de dimension 2 de base (f_1, f_2) .

Par construction, $\mathcal{S}_{]-a,a[}$ est inclus dans l'ensemble des solution de (E_a) sur $] - a, a[$.

De plus, (E_a) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont les coefficients sont des fonctions continues, donc l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 sur chacun des intervalles $] - \infty, a[$ et $]a, +\infty[$ où le coefficient devant y'' est non nul. Ainsi,

L'ensemble des solutions de (E_a) sur $] - a, a[$ est $\mathcal{S}_{]-a,a[}$.

- b) Les fonctions $f(x) = 1$ et $g(x) = \frac{1}{x - a}$ sont solutions de (E_a) (calcul de vérification), donc, de même qu'au a)iii) sur chacun des intervalles, $\mathcal{S}_{]-\infty,a[} = \text{Vect}(f|_{]-\infty,a[}, g|_{]-\infty,a[})$ et $\mathcal{S}_{]a,+\infty[} = \text{Vect}(f|_{]a,+\infty[}, g|_{]a,+\infty[})$.

Pour obtenir les solutions sur $\mathbb{R}$, il reste à recoller ces solutions. Or g n'a pas de limite en a , donc les solutions seront forcément de la forme $\lambda_1 f$ sur $] - \infty, a[$ et $\lambda_2 f$ sur $]a, +\infty[$.

Pour que la fonction obtenue soit continue, il faut que $\lambda_1 = \lambda_2$, et dans ce cas on trouve une fonction constante, qui est bien $\mathcal{C}^2$.

Finalement, Les solutions de (E_a) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions constantes.

- 2) On considère α, β, γ et δ des réels tels que $\gamma \neq 0$. On pose pour tout x réel différent de $-\frac{\delta}{\gamma}$

$$g(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

- a) La fonction g est une fraction rationnelle, donc $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition. Elle est constante si et seulement si sa dérivée est identiquement nulle, c'est-à-dire,

$$\forall x \neq -\frac{\delta}{\gamma} \quad g'(x) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2} = 0$$

Conclusion : La fonction g est constante si et seulement si $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$.

- b) i) Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{\delta}{\gamma}\}$,

$$g(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \frac{\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma x + \delta - \delta) + \beta}{\gamma x + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{-\frac{\alpha\delta}{\gamma^2} + \frac{\beta}{\gamma}}{x + \frac{\delta}{\gamma}} = u + \frac{v}{x + w}$$

Avec $u = \frac{\alpha}{\gamma}, v = -\frac{\alpha\delta}{\gamma^2} + \frac{\beta}{\gamma}$ et $w = \frac{\delta}{\gamma}$.

On fait apparaître le dénominateur au numérateur. Vous pratiquez ce genre de technique lorsque vous écrivez $\ln(2+x) = \ln(2(1+x/2))$.

- ii) Seul le signe de v importe : si $v > 0$, g se comporte comme $x \mapsto 1/x$ et sinon comme $x \mapsto -1/x$. Pour obtenir des conditions plus lisibles, on multiplie par $\gamma^2 > 0$ (puisque $\gamma \neq 0$). Ainsi :

- si $-\alpha\delta + \beta\gamma > 0$, g est décroissante sur $] - \infty, -\delta/\gamma[$ et sur $] - \delta/\gamma, +\infty[$.
- si $-\alpha\delta + \beta\gamma < 0$, g est croissante sur $] - \infty, -\delta/\gamma[$ et sur $] - \delta/\gamma, +\infty[$.

c) Il faut distinguer la phase de recherche, où l'on part d'une homothétie de rapport λ et d'une translation de vecteur (x_0, y_0) , et la phase de rédaction, où l'on vérifie que ce que l'on a trouvé convient bien.

i) Soit $h : (x, y) \mapsto (\sqrt{v}x, \sqrt{v}y)$ l'homothétie de rapport $\sqrt{v}$. Montrons par double inclusion que $h(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}
 \boxed{\subset} \quad (x', y') \in h(\mathcal{C}) &\implies \exists (x, y) \in \mathcal{C} / (\sqrt{v}x, \sqrt{v}y) = (x', y') \\
 &\implies \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (\sqrt{v}x, \sqrt{v}y) = (x', y') \text{ et } xy = 1 \\
 &\implies \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (\sqrt{v}x, \sqrt{v}y) = (x', y') \text{ et } x'y' = vxy = v \\
 &\implies x'y' = v \\
 &\implies (x', y') \in \mathcal{D}
 \end{aligned}$$

Donc $h(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}
 \boxed{\supset} \quad (x', y') \in \mathcal{D} &\implies x'y' = v \\
 \text{Posons } x = \frac{1}{\sqrt{v}}x' \text{ et } y = \frac{1}{\sqrt{v}}y'. &\text{ Alors } h(x, y) = (x', y'). \text{ Reprenons.} \\
 &\implies xy = \frac{1}{v}x'y' = 1 \\
 &\implies (x, y) \in \mathcal{C} \\
 &\implies (x', y') = h(x, y) \in h(\mathcal{C})
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D} \subset h(\mathcal{C})$.

Conclusion : $\boxed{h(\mathcal{C}) = \mathcal{D}}$

ii) Soit $t : (x, y) \mapsto (x - w, y + u)$ la translation de vecteur $(-w, u)$. Montrons que $t(\mathcal{D}) = \Gamma$. Remarquons que l'équation de Γ peut s'écrire $(y - u)(x + w) = v$.

$$\begin{aligned}
 \boxed{\subset} \quad (x, y) \in \mathcal{D} &\implies xy = v \text{ et } (x', y') = t(x, y) = (x - w, y + u) \\
 &\implies (x' + w)(y' - u) = xy = v \text{ avec } (x', y') = t(x, y) \\
 &\implies (x', y') = t(x, y) \in \Gamma
 \end{aligned}$$

Donc $t(\mathcal{D}) \subset \Gamma$.

$$\begin{aligned}
 \boxed{\supset} \quad (x', y') \in \Gamma &\implies (x' + w)(y' - u) = v \\
 \text{Posons } (x, y) = t^{-1}(x', y') = (x' + w, y' - u). &\text{ Reprenons.} \\
 &\implies t(x, y) = (x', y') \text{ et } xy = v \\
 &\implies (x', y') = t(x, y) \text{ et } (x, y) \in \mathcal{D} \\
 &\implies (x', y') \in t(\mathcal{D})
 \end{aligned}$$

Donc $\Gamma \subset t(\mathcal{D})$.

Conclusion : $t(\mathcal{D}) = \Gamma$. Or $\mathcal{D} = h(\mathcal{C})$ d'après i), donc $\boxed{t \circ h(\mathcal{C}) = \Gamma}$

iii) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $t \circ h(x, y) = (\sqrt{v}x - w, \sqrt{v}y + u)$. Donc $t \circ h \neq \text{id}$ dès que $\sqrt{v} \neq 1$.

Montrons réciproquement que $\sqrt{v} \neq 1$ implique que $t \circ h$ est une homothétie (différente de l'identité).

Le fait que $t \circ h \neq \text{id}$ est immédiat. Une homothétie h_1 de rapport λ et de centre (x_0, y_0) est définie par $(x, y) \mapsto (x_0 + \lambda(x - x_0), y_0 + \lambda(y - y_0))$.

Posons h_1 l'homothétie de rapport $\sqrt{v}$ et de centre $\left(\frac{-w}{1 - \sqrt{v}}, \frac{u}{1 - \sqrt{v}}\right)$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
 h_1(x, y) &= \left(\frac{-w}{1 - \sqrt{v}} + \sqrt{v} \left(x + \frac{w}{1 - \sqrt{v}} \right), \frac{u}{1 - \sqrt{v}} + \sqrt{v} \left(y - \frac{u}{1 - \sqrt{v}} \right) \right) \\
 &= \left(\frac{-w + \sqrt{v}w}{1 - \sqrt{v}} + \sqrt{v}x, \frac{u - \sqrt{v}u}{1 - \sqrt{v}} + \sqrt{v}y \right) \\
 &= (-w + \sqrt{v}x, u + \sqrt{v}y) \\
 &= t \circ h(x, y)
 \end{aligned}$$

Donc $t \circ h = h_1$: L'application $t \circ h$ est une homothétie différente de l'identité si et seulement si

$\boxed{v \neq 1}$, et dans ce cas ce sera l'homothétie de rapport $\sqrt{v}$ et de centre $\left(\frac{-w}{1 - \sqrt{v}}, \frac{u}{1 - \sqrt{v}}\right)$.

Plus généralement, tout composée d'une homothétie de rapport $\lambda \neq 1$ et d'une translation est une homothétie. On utilise les affixes :

Si h est l'homothétie de rapport λ et de centre ω , on a $h(z) - \omega = \lambda(z - \omega)$.

Si t est la translation de vecteur z_0 , on a $t(z) = z + z_0$.

Donc $t \circ h(z) = z_0 + \omega + \lambda z - \lambda \omega$, qui peut se mettre sous la forme $t \circ h(z) - \omega' = \lambda(z - \omega')$, avec $\omega' = \omega + \frac{z_0}{1 - \lambda}$.

Même remarque pour $h \circ t$.

- d) Au 1)b) on a montré que les solutions de (E_a) sont des combinaisons linéaires de la fonction constante $x \mapsto 1$ et de $x \mapsto \frac{1}{x - a}$ (sur chaque intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$). Donc g est solution de (E_a) si et seulement si g est de la forme $x \mapsto \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{x - a}$ (où les λ_i dépendent des conditions initiales).

Ainsi, g est solution de (E_a) sur $] -\infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$ lorsque $\boxed{a = -w = -\frac{\delta}{\gamma}}$.

On remarque qu'on retrouve le domaine de définition de g . Ce qui nous donne un moyen de vérifier les calculs : la valeur interdite pour g est $x = -\frac{\delta}{\gamma}$, et lors de la résolution de (E_a) c'est $x = a$.

Partie 2 (Fractions continues) 1) a) La fonction f n'est pas définie uniquement lorsque $x = [x]$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{Z}$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x + 1] = [x] + 1$, donc

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad x + 1 \in \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad f(x + 1) = \frac{1}{x + 1 - ([x] + 1)} = f(x)$$

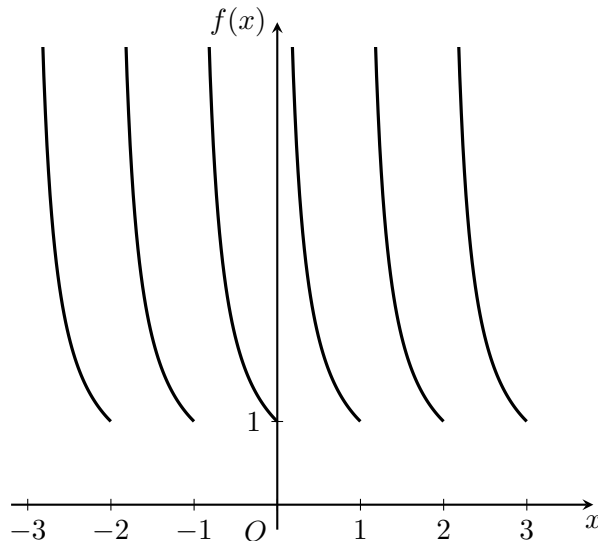
Par suite, $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est périodique de période 1.}}$

- b) Soit $x \in]k, k + 1[$. Par définition, $k < x < k + 1$, donc $[x] = k$. Ainsi, $f(x) = \frac{1}{x - k}$.

Donc $\boxed{\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 1 \text{ et } \delta = -k.}$

- c) Sur chaque intervalle de la forme $]k, k + 1[$ f est décroissante (translation de vecteur $(k, 0)$ de la courbe $y = 1/x$). $\lim_{k^+} f = +\infty$ et $\lim_{k^-} f = 1$.

Ainsi, $f(\mathcal{D}_f) = \text{Im } f =]1, +\infty[$.



- d) Irrationnel : Raisonnons par contraposition. Soit $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $f(x) \in \mathbb{Q}$. Montrons que $x \in \mathbb{Q}$. Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(x) = \frac{1}{x - [x]} = \frac{p}{q}$. $f(x) \neq 0$ donc $x - [x] = \frac{q}{p}$, et finalement $x = [x] + \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$.

En conclusion, par contraposition, $\boxed{\text{pour tout nombre } x \text{ irrationnel } f(x) \text{ est irrationnel.}}$

Rationnel : Soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap \mathcal{D}_f = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. $f(x) = \frac{1}{x - [x]} = \frac{1}{\frac{p}{q} - [x]} = \frac{q}{p - q[x]} \in \mathbb{Q}$.

Donc pour tout nombre x rationnel non entier $f(x)$ est rationnel non entier.

2) a) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ et } x_{n+1} \text{ bien défini.}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$: $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ par hypothèse, donc $x_0 \in \mathcal{D}_f$ et x_1 est bien défini.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. D'après 1)d), $x_{n+1} = f(x_n) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathcal{D}_f$.
Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\forall n \geq 0 \quad x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ et } x_{n+1} \text{ bien défini.}$

b) i) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad x_n \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad x_n > 1$$

est vraie pour tout $n \geq 1$.

- $\mathcal{H}_1$: $x_0 \in \mathbb{Q}$ par hypothèse, donc $x_1 = f(x_0) \in \mathbb{Q}$ d'après 1)d). De plus, d'après 1)c), $\text{Im } f =]1, +\infty[$ donc $x_1 = f(x_0) > 1$.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.
D'après 1)d), $x_{n+1} = f(x_n) \in \mathbb{Q}$ et, d'après 1)c), $x_{n+1} = f(x_n) > 1$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\forall n \geq 1 \quad x_n \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad x_n > 1$

Remarque : on a supposé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n était bien défini, donc $f(x_n)$ existe toujours.

ii) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad v_n > 0 \quad \text{et} \quad x_n = \frac{u_n}{v_n}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$: Par définition, $x_0 = \frac{u_0}{v_0}$ et $v_0 \in \mathbb{N}^*$.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Écrivons la division euclidienne de u_n par $v_n > 0$:

$$u_n = qv_n + v_{n+1} \quad \text{avec} \quad 0 \leq v_{n+1} < v_n \quad \text{et} \quad q = \left\lfloor \frac{u_n}{v_n} \right\rfloor$$

En divisant par $v_n > 0$, il vient $\frac{u_n}{v_n} - \left\lfloor \frac{u_n}{v_n} \right\rfloor = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}$ par définition de u_{n+1} .

Si $v_{n+1} = 0$, $\frac{u_n}{v_n} - \left\lfloor \frac{u_n}{v_n} \right\rfloor = x_n - \lfloor x_n \rfloor = 0$ et $f(x_n) = \frac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor}$ n'est pas défini, ce qui est absurde.

D'où $v_{n+1} > 0$ et $x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor} = \frac{1}{v_{n+1}/u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ vraie.

- Conclusion : $\forall n \geq 0 \quad v_n > 0 \quad \text{et} \quad x_n = \frac{u_n}{v_n}$

iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} est le reste de la division euclidienne par v_n , donc $v_{n+1} < v_n$:
la suite (v_n) est strictement décroissante. (On pouvait aussi partir de $v_n > 0$ et $x_n > 1$)

Or (v_n) est minorée par 0 d'après ii), donc convergente. Mais une suite d'entier convergente est stationnaire, ce qui est contradictoire avec la stricte décroissance de (v_n) . Donc on ne peut pas supposer que x_n est bien défini lorsque $x_0 \in \mathbb{Q}$:

Au bout d'un nombre d'étapes fini n , on trouve $x_n \in \mathbb{Z}$.

c) (C'est une question de synthèse, qui n'utilise que le résultat des questions a) et b), et peut donc se faire en admettant ces résultats.)

D'après a), $x_0 \notin \mathbb{Q}$ implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini.

D'après b), $x_0 \in \mathbb{Q}$ implique qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que x_n n'est pas défini. Donc par contraposition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini implique $x_0 \notin \mathbb{Q}$. Finalement,

$x_0 \notin \mathbb{Q}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n soit bien défini.

3) a)

```

1  import numpy as np
2
3
4  def f(x):
5      return 1 / (x-np.floor(x))
6
7
8  def x(x0, n):
9      if n == 0:
10         return x0
11     else:
12         return f(x(x0, n-1))
13
14
15 def a(x0, n):
16     return np.floor(x(x0, n))
17
18 x0 = (1+np.sqrt(5))/2
19 N = 10
20 for n in range(N):
21     print('n =', n, 'a =', a(x0, n))

```

b) i) On trouve $a_0 = 1$ puis $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 2$. On peut conjecturer que $a_n = 2$ pour tout $n \geq 1$.

$$\text{ii)} \quad x_1 = f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2} - \lfloor \sqrt{2} \rfloor} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = 1 + \sqrt{2}.$$

$$x_2 = f(x_1) = \frac{1}{1 + \sqrt{2} - \lfloor 1 + \sqrt{2} \rfloor} = \frac{1}{\sqrt{2} - \lfloor \sqrt{2} \rfloor} = x_1.$$

Donc x_1 est un point fixe de la fonction $f : f(x_1) = x_1$. Ainsi, une récurrence immédiate nous montre que $x_n = x_1$ pour tout $n \geq 1$.

Par conséquent, $\forall n \geq 1, a_n = \lfloor x_n \rfloor = \lfloor x_1 \rfloor = 2$

iii) La procédure nous donne $a_0 = 1, a_1 = a_3 = 1$ et $a_2 = a_4 = 2$.

On conjecture une suite périodique $a_{2n} = 2$ et $a_{2n-1} = 1$ pour tout $n \geq 1$.

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad x_{2n} = x_2 = 1 + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_{2n-1} = x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

est vraie pour tout $n \geq 1$.

- $\mathcal{H}_1 : x_1 = f(\sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$

$$x_2 = f(x_1) = \frac{2}{\sqrt{3} + 1 - 2\lfloor \frac{1+\sqrt{3}}{2} \rfloor} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = 1 + \sqrt{3}.$$

- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$x_{2(n+1)-1} = x_{2n+1} = f(x_{2n}) = f(1 + \sqrt{3}) = \frac{1}{1 + \sqrt{3} - \lfloor \sqrt{3} \rfloor - 1} = f(x_0) = x_1$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \geq 1 \quad x_{2n} = x_2 \quad \text{et} \quad x_{2n-1} = x_1$

c) i) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad p_{n-1} \in \mathbb{N} \quad q_{n-1} \in \mathbb{N} \quad p_n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad q_n \in \mathbb{N}^*$$

est vraie pour tout $n \geq 1$. Attention, il est nécessaire et fondamental que $\mathcal{H}_n$ porte aussi sur le rang $n - 1$ de (p_n) et (q_n) . En particulier, l'initialisation est modifiée.

- $\mathcal{H}_1$: les (a_n) sont des entiers, donc p_0, p_1, q_0 et q_1 aussi. de plus a_0 est positif car x_0 l'est, et a_1 est plus grand que 1 car c'est la partie entière de $x_1 = f(x_0) \in [1, +\infty[$. Donc p_0 et q_0 sont positifs, et p_1 et q_1 strictement positifs : $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Comme a_{n+1} est un entier strictement positif, que p_{n-1} et q_{n-1} sont aussi des entiers strictement positifs, et que p_{n-2} et q_{n-2} sont des entiers positifs, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\forall n \geq 1 \quad p_n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad q_n \in \mathbb{N}^*$

Démontrer que pour tout $n \geq 1$, p_n et q_n sont des entiers naturels non nuls.

- ii) La suite (q_n) est strictement positive pour tout n , d'après i) et puisque $q_0 = 1 > 0$. Pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} > a_n \geq 1$$

Donc (q_n) est strictement croissante à partir de $n = 1$.

Par conséquent, pour tout $n \geq 2$, $q_n - q_{n-1} > 0$, ce qui dans les entiers implique $q_n - q_{n-1} \geq 1$.

En sommant, on obtient $\sum_{k=2}^n q_k - q_{k-1} = q_n - q_1 \geq n - 1$. Or $q_1 = a_1 \geq 1$, d'où le résultat

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, q_n \geq n.}$$

- iii) Soit $D_n = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$. Montrons que la suite $(D_n)_n$ est géométrique de raison -1 : pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} D_n = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-1} \\ &= p_{n-2} q_{n-1} - q_{n-2} p_{n-1} = -D_{n-1} \end{aligned}$$

De plus $D_1 = p_1 q_0 - p_0 q_1 = a_0 a_1 + 1 - a_0 a_1 = 1$.

En conclusion, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = D_n = (-1)^{n-1}.}$

On peut aussi le voir avec des déterminants :

$$D_n = \det \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_n p_{n-1} + p_{n-2} & p_{n-1} \\ a_n q_{n-1} + q_{n-2} & q_{n-1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ q_{n-2} & q_{n-1} \end{pmatrix} = -D_{n-1}$$

- iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $U_n = \frac{p_n + p_{n+1} x_{n+2}}{q_n + q_{n+1} x_{n+2}}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \frac{p_n + p_{n+1} \frac{1}{x_{n+1} - a_{n+1}}}{q_n + q_{n+1} \frac{1}{x_{n+1} - a_{n+1}}} = \frac{(x_{n+1} - a_{n+1}) p_n + p_{n+1}}{(x_{n+1} - a_{n+1}) q_n + q_{n+1}}$$

Or $-a_{n+1} p_n + p_{n+1} = p_{n-1}$ et de même pour (q_n) . Ainsi $U_n = \frac{x_{n+1} p_n + p_{n-1}}{x_{n+1} q_n + q_{n-1}} = U_{n-1}$.

La suite (U_n) est donc constante, et $U_0 = x_0$, d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{p_n + p_{n+1} x_{n+2}}{q_n + q_{n+1} x_{n+2}}.}$

- d) i) $\forall n \in \mathbb{N}^*, r_n - r_{n-1} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$ d'après c)iii).

- ii) Montrons qu'elle vérifie le critère des séries alternées.

- $q_n > 0$ donc la série est alternée.
- La suite (q_n) est croissante (c)ii), donc $(q_n q_{n-1})$ aussi, et ainsi $\left(\frac{1}{q_n q_{n-1}}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante.
- D'après c)ii), $q_n \geq n$, d'où pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{q_n q_{n-1}} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q_n q_{n-1}} = 0$.

Ainsi, d'après le critère des séries alternées, $\boxed{\text{la série de terme général } r_n - r_{n-1} \text{ est convergente.}}$

- iii) La série de terme général $r_n - r_{n-1}$ est convergente, c'est-à-dire que la suite des sommes partielles $\sum_{k=1}^n (r_k - r_{k-1}) = r_n - r_0$ converge. Donc la suite (r_n) converge.
- iv) C'est une conséquence du critère des séries alternée.
Puisque r appartient à l'intervalle de bornes r_n et r_{n+1} , la longueur $|r - r_n|$ est plus petite que la longueur de l'intervalle, c'est-à-dire $|r_{n+1} - r_n| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}$.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| r - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}$.

On a donc approché r avec une précision que l'on peut contrôler.

- 4) a) Supposons x_0 irrationnel. Alors $x_0 \neq -\frac{\delta}{\gamma} = -\delta \in \mathbb{Z}$, donc y_0 bien défini. Supposons de plus $y_0 = \frac{p}{q}$ rationnel.

$$y_0 = g(x_0) = \frac{\alpha x_0 + \beta}{\gamma x_0 + \delta} = \frac{\alpha x_0 + 1 + \alpha \delta}{x_0 + \delta} = \alpha + \frac{1}{x_0 + \delta}$$

Donc $x_0 = -\delta + \frac{1}{y_0 - \alpha} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde.

Conclusion : Le nombre réel $y_0 = g(x_0)$ est bien défini et irrationnel.

- b) Par hypothèse, $x_0 > 0$ et $\delta \geq 1$, donc $\frac{1}{x_0 + \delta} < 1$, ainsi $\alpha \leq y_0 = \alpha + \frac{1}{x_0 + \delta} < \alpha + 1$. Puisque $\alpha \in \mathbb{Z}$, $b_0 = \lfloor y_0 \rfloor = \alpha$. De plus

$$y_1 = f(y_0) = \frac{1}{y_0 - \lfloor y_0 \rfloor} = \frac{1}{y_0 - \alpha} = x_0 + \delta$$

Donc, comme $\delta \in \mathbb{Z}$, $b_1 = \lfloor f(y_0) \rfloor = \lfloor x_0 + \delta \rfloor = a_0 + \delta$

Ainsi, $y_2 = f(y_1) = \frac{1}{x_0 + \delta - (a_0 + \delta)} = x_1$.

Les suites $(y_{n-1})_{n \geq 2}$ et $(x_n)_{n \geq 1}$ sont définies par la même relation de récurrence et ont même premier terme, donc sont égales.

Par suite, leurs parties entières sont égales : Pour tout $n \geq 2$, $a_{n-1} = b_n$.

- 5) a) Raisonnons par l'absurde. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta = (\delta + \alpha)^2 + 4 = n^2$.
On a $n^2 \geq (1 + 1)^2 + 4 = 8$ donc $n \geq 3$.
De plus, $n^2 - (\delta + \alpha)^2 = 4$ donc $(n - (\delta + \alpha))(n + \delta + \alpha) = 4$. Or $(n + \delta + \alpha) \geq 3 + 1 + 1 = 5$.
On vient donc d'écrire 4 comme produit de deux entiers dont l'un est plus grand que 5 : c'est absurde. Par conséquent, Δ n'est pas le carré d'un entier.

- b) On calcule le discriminant : $(\delta - \alpha)^2 + 4(\alpha\delta + 1) = \delta^2 + 2\alpha\delta + \alpha^2 + 4 = \Delta > 0$. Donc retrouve donc le Δ de la question précédente : $\sqrt{\Delta}$ est irrationnel.

L'équation a deux solutions distinctes ($\Delta > 0$), $\frac{1}{2}(\alpha - \delta \pm \sqrt{\Delta})$. Or $\Delta \geq |\delta - \alpha|$ donc l'unique

solution positive est $z_0 = \frac{1}{2}(\alpha - \delta + \sqrt{\Delta})$.

- c) $\frac{1}{z_0 + \delta} = \frac{2}{\alpha - \delta + \sqrt{\Delta} + 2\delta} = \frac{2(\alpha + \delta - \sqrt{\Delta})}{(\alpha + \delta)^2 - ((\delta + \alpha)^2 + 4)} = \frac{1}{2}(-(\alpha + \delta) + \sqrt{\Delta})$.

Donc $g(z_0) = \alpha + \frac{1}{z_0 + \delta} = z_0$

On pouvait aussi remarquer que $g(x) = x \iff (x^2 + (\delta - \alpha)x - \alpha\delta - 1 = 0 \text{ et } x \neq \delta)$.

Il y a souvent des questions faciles y compris en fin de sujet. Garder quelques minutes en fin d'épreuve pour les faire peut être une bonne stratégie.

- d) D'après 4)b), le développement en fraction continue de $g(z_0)$ s'obtient, à partir de $n = 2$, par un décalage d'indice dans celui de z_0 . Or $z_0 = g(z_0)$, donc $a_n = b_n$.

Ainsi, Le développement en fraction continue (a_n) du nombre z_0 est constant à partir de $n = 1$.

- e) $z_0 = \frac{\alpha - \delta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\delta + \alpha}{2}\right)^2 + 1}$, donc en posant $\alpha = \delta = p \in \mathbb{N}^*$, il vient $z_0 = \sqrt{p^2 + 1}$.

Par conséquent, en appliquant le résultat de la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il vient

Le développement en fraction continue de $\sqrt{p^2 + 1}$ est constant à partir de $n = 1$.

Plus précisément, on a $a_0 = \alpha = p$, puis $a_1 = a_n = \delta + \alpha = 2p$.