Devoir de Mathématiques numéro 1

Exercice 1

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_1 = 1 \text{ et pour } n \geqslant 2,\ u_n = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n})\ ;\ v_n = \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})$$

1) Rappeler le domaine de définition de la fonction $(x \mapsto x + \ln(1 - x))$.
Préciser son développement de Taylor à l'ordre 2 en 0.

2) Soit n un entier naturel. Quel est le signe de u_n ?

3) Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.

4) Etudier la fonction $f\ :\ x \mapsto x - \ln(1 + x)$ sur $[0, 1]$.

5) Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est convergente.

6) Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n, $v_n - u_n$.
En déduire une expression de $\sum_{n=1}^{N}(v_n - u_n)$ en fonction de N pour tout entier naturel $N \geqslant 3$.

7) Que peut-on dire des suites $(\sum_{n=1}^{N} v_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $(\sum_{n=1}^{N} u_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$? Justifier que $\sum_{n\geqslant 1} v_n = \sum_{n\geqslant 1} u_n$.

8) On note γ la somme des séries $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} u_n$. Démontrer que γ est dans l'intervalle $]0, 1[$.

Exercice 2

Définitions et notations :

- On dit qu'un nombre réel x est rationnel s'il existe deux entiers relatifs p et q (avec $q \neq 0$) tels que $x = \dfrac{p}{q}$.
- On dit qu'un nombre réel x est irrationnel s'il n'est pas rationnel.
- L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.
- Pour tout nombre réel x, on appelle partie entière de x et on note $\lfloor x\rfloor$ le plus grand entier relatif inférieur à x : $\lfloor x\rfloor \leqslant x < 1 + \lfloor x\rfloor$.

Partie 1 (Fonctions homographiques)

1) Cette question est réservée aux 5/2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, on considère

$$(E_a) \qquad (x - a)y'' + 2y' = 0$$

où y est une fonction inconnue de la variable x de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle réel et à valeur réelle.

a) On suppose $a > 0$. On considère une suite réelle (a_n) et on définit une fonction y comme la somme de la série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$ (avec $R > 0$).

i) On suppose que y est solution de (E_a). Déterminer, pour tout $x \in]-R, R[$, une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n), puis déterminer a_n en fonction de n et de a_1, pour tout $n \geqslant 1$. Exprimer y à l'aide de fonctions usuelles.

ii) En déduire les fonctions développables en série entière qui sont solutions de (E_a) sur $]-a, a[$.

iii) Montrer qu'elles forment un espace vectoriel de dimension 2 et en donner une base. En déduire l'ensemble des solutions de (E_a) sur $]-a, a[$.

b) On suppose que a est un nombre réel quelconque. Résoudre (E_a) sur $]-\infty, a[$, puis sur $]a, +\infty[$ et enfin sur $\mathbb{R}$.

2) On considère α, β, γ et δ des réels tels que $\gamma \neq 0$. On pose pour tout x réel différent de $-\dfrac{\delta}{\gamma}$

$$g(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

a) À quelle condition g est-elle constante ? On suppose dans la suite que cette condition n'est jamais remplie.

b) **i)** Déterminer des nombres réels u, v et w tels que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-\dfrac{\delta}{\gamma}\}$, $g(x) = u + \dfrac{v}{x+w}$.

ii) En déduire le sens de variation de g sur chacun de ses intervalles de définition.

c) On suppose dans cette question que $v > 0$. On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé. On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $xy = 1$, la courbe $\mathscr{D}$ d'équation $xy = v$ et la courbe Γ d'équation $g(x) = y$ dans ce repère.

i) Trouver une homothétie h telle que $h(\mathscr{C}) = \mathscr{D}$.

ii) Trouver une translation t telle que $t \circ h(\mathscr{C}) = \Gamma$.

iii) À quelle condition sur v l'application $t \circ h$ est-elle une homothétie différente de l'identité ? Déterminer alors son centre et son rapport.

d) Déterminer un réel a pour lequel la fonction g est solution de (E_a) sur des intervalles que l'on précisera.

Partie 2 (Fractions continues)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor}$.

1) **a)** Déterminer l'ensemble de définition de f. Montrer que f est périodique de période 1.

b) On considère $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer des réels α, β, γ et δ tels que la restriction de f à $]k, k+1[$ coïncide avec celle de la fonction g (telle que définie au 1.2) à ce même intervalle.

c) Étudier f ; on précisera en particulier ses variations, son ensemble image et on tracera son graphe dans un repère orthonormé.

d) Démontrer que pour tout nombre x irrationnel (resp. rationnel non entier), $f(x)$ est irrationnel (resp. rationnel).

2) On pose $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 > 0$ et on s'intéresse lorsque cela est possible à la suite (x_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

a) On suppose dans cette question que $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini.

b) On suppose dans cette question que $x_0 \in \mathbb{Q}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini.
On considère u_0 et v_0 deux entiers naturels non nuls tels que $x_0 = \dfrac{u_0}{v_0}$.

i) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{Q}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > 1$.

ii) On définit par récurrence deux suites d'entiers (u_n) et (v_n) en posant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = v_n$ et v_{n+1} égal au reste de la division euclidienne de u_n par v_n lorsque v_n est non nul, et 0 sinon. Démontrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ et $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

iii) Démontrer que la suite (v_n) est strictement décroissante. Que peut-on conclure, l'hypothèse faite au début du b) est-elle possible ?

c) Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur x_0 pour que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n soit bien défini.

3) On fixe dans toute cette partie $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ tel que $x_0 > 0$. On considère la suite (x_n) définie au 2)a) et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \lfloor x_n \rfloor$.
La suite des entiers (a_n) est appelée développement en fraction continue de x_0.

a) Écrire un programme Python d'argument x_0 et n donnant a_n.

b) On pose dans cette question $x_0 = \sqrt{2}$ (on admettra que c'est un irrationnel).

i) Tester l'algorithme du a) pour $x_0 = \sqrt{2}$ et n valant successivement 0, 1, 2, 3 et 4. Donner les valeurs de a_n obtenues. Quelle conjecture peut-on formuler ?

ii) Calculer exactement les valeurs de x_1, x_2. En déduire que la suite (x_n) est stationnaire, puis démontrer la conjecture du a).

iii) Reprendre les 2 questions précédentes avec $x_0' = \sqrt{3}$ (on admettra que c'est un irrationnel).

c) On définit deux suites (p_n) et (q_n) par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} p_0 & = & a_0 \\ q_0 & = & 1 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{lcl} p_1 & = & a_0 a_1 + 1 \\ q_1 & = & a_1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2 \left\{ \begin{array}{lcl} p_n & = & a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n & = & a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{array} \right.$$

i) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, p_n et q_n sont des entiers naturels non nuls.

ii) Démontrer que la suite (q_n) est strictement croissante. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n \geqslant n$.

iii) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$.

iv) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 = \dfrac{p_n + p_{n+1} x_{n+2}}{q_n + q_{n+1} x_{n+2}}$.

d) On définit une suite de rationnels (r_n) par $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

i) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_n - r_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$.

ii) Montrer que la série de terme général $r_n - r_{n-1}$ est alternée et convergente.

iii) En déduire que la suite (r_n) converge.

iv) On note r la limite de (r_n). Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, r est compris entre r_n et r_{n+1} et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| r - \dfrac{p_n}{q_n} \right| \leqslant \dfrac{1}{q_n^2}$.

4) On considère un nombre irrationnel x_0, deux nombres entiers α et δ strictement positifs, et on pose $\beta = 1 + \alpha\delta$ et $\gamma = 1$.

a) Démontrer que le nombre réel $y_0 = g(x_0)$ (avec g définie dans la partie 1) est bien défini et qu'il est irrationnel.

b) On note respectivement (a_n) et (b_n) les développements en fraction continue de x_0 et y_0 définis au 3). Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$, $a_{n-1} = b_n$.

5) On considère deux entiers α et δ strictement positifs et on pose : $\Delta = (\delta + \alpha)^2 + 4$.
On pose, comme au 4), $\beta = 1 + \alpha\delta$ et $\gamma = 1$.

a) Démontrer que Δ n'est pas le carré d'un entier. On en déduit et on l'admettra que $\sqrt{\Delta}$ est un nombre irrationnel.

b) Démontrer que l'équation du second degré $x^2 + (\delta - \alpha)x - \alpha\delta - 1 = 0$ possède deux solutions réelles distinctes toutes les deux irrationnelles dont l'une, notée z_0, est strictement positive.

c) Démontrer que $z_0 = g(z_0)$.

d) Que peut-on en déduire quant au développement en fraction continue du nombre z_0 ?

e) Que peut-on dire du développement en fraction continue de $\sqrt{p^2 + 1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$?