Devoir de Mathématiques numéro 1

Correction

Exercice 1 (E3A MP 2017)

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_3'(x) = 1 + \dfrac{2x}{2} + \dfrac{3x}{3!} = S_2(x)$.
Comme $\Delta = 1 - 4/2 = -1 < 0$, $S_2(x)$ n'a pas de racines réelles et est donc de signe constant.

x	$-\infty$	$+\infty$
$S_2(x)$	$+$	
S_3	$-\infty$	$+\infty$

Positions relatives :

- Pour les x positifs ou nuls :

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = S_3(x) + \underbrace{\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}_{\geqslant 0} \geqslant S_3(x)$$

Donc la courbe de l'exponentielle est au-dessus de celle de S_3. De même,

$$S_3(x) = S_1(x) + \underbrace{\sum_{k=2}^{3} \frac{x^k}{k!}}_{\geqslant 0} \geqslant S_1(x)$$

Donc la courbe de S_3 est au-dessus de celle de S_1.

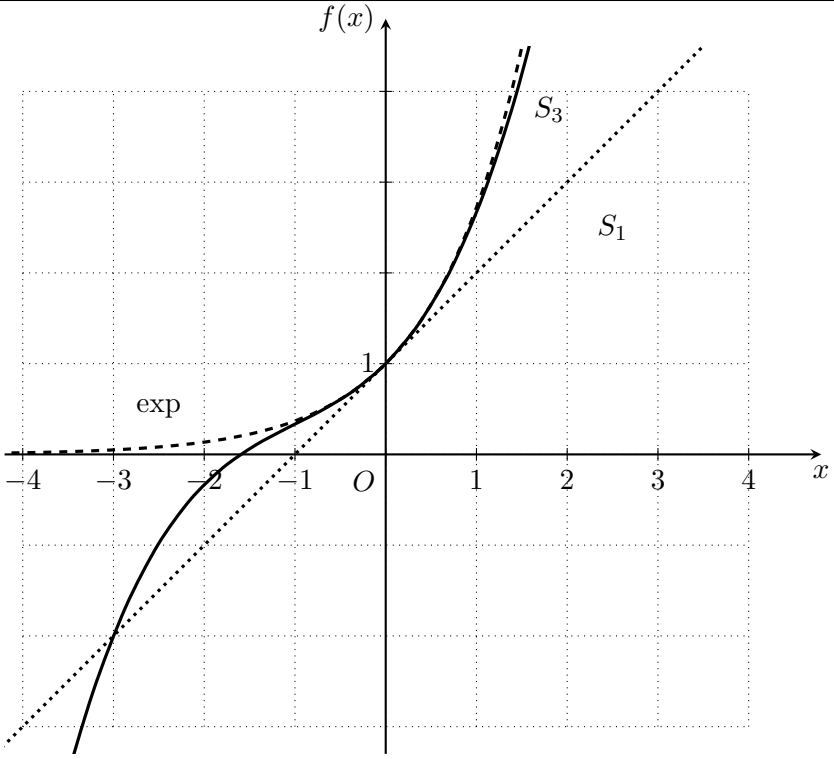
- Pour les x négatifs ou nuls : Posons

$$g(x) = e^x - S_3(x)$$

La fonction g est $\mathscr{C}^\infty$, et $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $g'(x) = e^x - S_2(x)$, $g''(x) = e^x - S_1(x)$ et $g'''(x) = e^x - 1 \leqslant 0$.
Donc g'' est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, or $g''(0) = 0$, donc $g'' \geqslant 0$: la courbe de l'exponentielle est au-dessus de celle de S_1 (résultat classique).
De plus, comme $g'' \geqslant 0$, g' est croissante sur $\mathbb{R}_-$, or $g'(0) = 0$, donc $g' \leqslant 0$. Ainsi g est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, or $g(0) = 0$, donc $g \geqslant 0$: la courbe de l'exponentielle est au-dessus de celle de S_3.
Pour étudier des positions relative, on pose $g = f_1 - f_2$ et on étudie le signe. Pour étudier un signe, au besoin, on fait un tableau de variations. Etc..
De plus,

$$S_3(x) - S_1(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} = \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{x}{3}\right)$$

La parenthèse est positive si et seulement si $x \geqslant -3$, donc la courbe de S_3 est au-dessus de celle de S_1 sur $[-3, 0]$ (et même $[-3, +\infty[$, mais je m'intéresse ici aux $x \leqslant 0$), et en-dessous sur $]-\infty, -3]$.



2) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad S_{2n} \text{ n'a pas de racine réelle et } S_{2n+1} \text{ a une unique racine réelle simple.}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $S_0 = 1$ n'a pas de racine réelle et $S_1 = 1 + X$ a une unique racine réelle simple ($x = -1$). Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie :

  S_{2n} n'a pas de racine réelle et S_{2n+1} a une unique racine réelle α_{2n+1} simple.

  Le coefficient dominant de S_{2n+1} étant $\dfrac{1}{(2n+1)!} > 0$, nous avons le tableau de signe de $S_{2n+1}(x)$.
  De plus, on remarque que $S'_{2n+2} = S_{2n+1}$ et $S'_{2n+3} = S_{2n+2}$. D'où les tableaux de signes et de variations suivants :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ α_{2n+1} $\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $S_{2n+1}(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
S_{2n+2}	$+\infty$ $\searrow$ $S_{2n+2}(\alpha_{2n+1}) > 0$ $\nearrow$ $+\infty$
signe de $S_{2n+2}(x)$	$+$
S_{2n+3}	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

Comme $S_{2n+2} = S_{2n+1} + \dfrac{X^{2n+2}}{(2n+2)!}$ et $S_{2n+1}(\alpha_{2n+1}) = 0$, $S_{2n+2}(\alpha_{2n+1}) = \dfrac{(\alpha_{2n+1}^{n+1})^2}{(2n+2)!} > 0$.

Donc, dans un premier temps, S_{2n+2} n'a pas de racine réelle.

De plus la fonction S_{2n+3} est polynomiale donc continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, strictement croissante, et $\lim\limits_{-\infty} S_{2n+3} < 0$, $\lim\limits_{+\infty} S_{2n+3} > 0$. Donc, d'après le théorème de la bijection, $S_{2n+3}(x) = 0$ a une unique solution.

En d'autres termes, S_{2n+3} a une unique racine réelle. Si cette racine α_{2n+3} était double, alors $S'_{2n+3}(\alpha_{2n+3}) = 0$. Or $S'_{2n+3} = S_{2n+2}$, qui n'a pas de racines réelles.

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad S_{2n} \text{ n'a pas de racine réelle et } S_{2n+1} \text{ a une unique racine réelle simple.}}$

3) a) Par définition, $S_{2n-1}(\alpha_{2n-1}) = 0$ et $S_{2n+1} = S_{2n-1} + \dfrac{X^{2n}}{(2n)!} + \dfrac{X^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Ainsi,

$$S_{2n+1}(\alpha_{2n-1}) = \frac{\alpha_{2n-1}^{2n}}{(2n)!} + \frac{\alpha_{2n-1}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \underbrace{\frac{\alpha_{2n-1}^{2n}}{(2n)!}}_{>0}\left(1 + \frac{\alpha_{2n-1}}{2n+1}\right)$$

Or, d'après l'énoncé, pour tout $n \geqslant 2$, les racines de S_n sont de module strictement plus petit que n. Donc $\alpha_{2n-1} > -(2n+1)$, et $\left(1 + \dfrac{\alpha_{2n-1}}{2n+1}\right) > 0$. Ainsi, $S_{2n+1}(\alpha_{2n-1}) > 0$.

De plus, d'après 2), S_{2n+1} est strictement croissante, donc $S_{2n+1}(\alpha_{2n+1}) = 0 < S_{2n+1}(\alpha_{2n-1})$ entraîne $\alpha_{2n+1} < \alpha_{2n-1}$.

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

b) i) Comme (v_m) converge, elle est bornée et en particulier $(|v_m|)$ est majorée. Soit A un majorant de $(|v_m|)$:

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad |v_m| \leqslant A$$

D'après l'énoncé, $e^z = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$. Donc en particulier, $\displaystyle\sum \frac{A^k}{k!}$ converge, ce qui entraîne que la suite des restes $\Big(\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}\Big)_m$ converge vers 0 :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \geqslant M \Longrightarrow \left|\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}\right| < \varepsilon$$

Or $|S_m(v_m) - e^{v_m}| = \left|\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{v_m^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{|v_m|^k}{k!} \leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$. Soit ε un nombre réel > 0.

$$\exists M \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \geqslant M \Longrightarrow |S_m(v_m) - e^{v_m}| \leqslant \left|\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}\right| < \varepsilon$$

Ainsi, $\boxed{\text{Il existe un entier naturel } M \text{ tel que : } \forall m \in \mathbb{N},\ m > M \Rightarrow |S_m(v_m) - e^{v_m}| < \varepsilon}$

ii) Comme (v_m) converge vers ℓ, et que la fonction exponentielle est continue en ℓ, (e^{v_m}) converge vers e^ℓ :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M' \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \geqslant M' \Longrightarrow \left|e^{v_m} - e^\ell\right| < \varepsilon$$

Or d'après i),

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \geqslant M \Longrightarrow |S_m(v_m) - e^{v_m}| < \varepsilon$$

Or $|S_m(v_m) - e^\ell| = |S_m(v_m) - e^{v_m} + e^{v_m} - e^\ell| \leqslant |S_m(v_m) - e^{v_m}| + |e^{v_m} - e^\ell|$. Donc avec $M'' = \max(M, M')$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M'' \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \geqslant M \Longrightarrow \left|S_m(v_m) - e^\ell\right| < 2\varepsilon$$

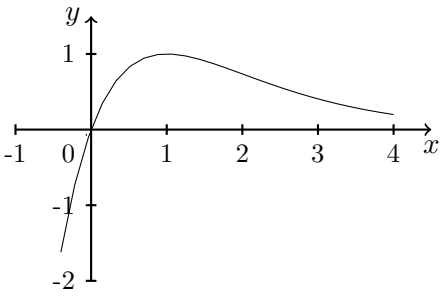
D'où $\boxed{\text{La suite } (S_m(v_m))_{m\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } e^\ell}$

c) Si (α_{2n+1}) converge vers ℓ, alors, d'après b), la suite $(S_{2n+1}(\alpha_{2n+1}))$, qui est la suite nulle, converge vers $e^{\ell} > 0$. Ce qui est absurde. Donc (α_{2n+1}) ne converge pas.
D'après a), (α_{2n+1}) est décroissante. Comme elle n'a pas de limite finie,

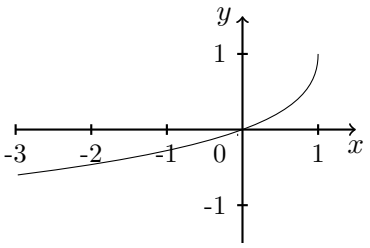
$$\boxed{\text{La suite } (\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } -\infty}$$

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $h'(x) = (1-x)e^{1-x}$ qui est du signe de $(1-x)$.
La limite en $-\infty$ s'obtient par produit celle en $+\infty$ par la croissance comparée $te^t \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0



5) La fonction h est continue et strictement croissante sur $]-\infty,1[$. De plus $\lim\limits_{x\to1} h(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$. Donc h induit une bijection de $]-\infty,1[$ vers $]-\infty,1[$
On pose g la bijection réciproque qui est continue et strictement croissante
De plus h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et h' ne s'annule pas sur $]-\infty,1[$
donc $\boxed{g \text{ de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ de }]-\infty,1[\text{ dans }]-\infty,1[\text{ vérifiant } \forall x \in]-\infty,1[,\ h(g(x)) = x}$
Le graphe de g est obtenu par symétrie du graphe de f par rapport à la première bissectrice $y = -x$.



6) Comme h induit une bijection de $]-\infty,1[$ vers $]-\infty,1[$, il existe un unique $\rho \in]-\infty,1[$ tel que $h(\rho) = -1$.
De plus $\forall x \geqslant 1$, $h(x) > 0$ ainsi $\boxed{\text{il existe un unique nombre réel } \rho \text{ tel que } h(\rho) = -1}$

7) $h(-1/2) = -\dfrac{e^{3/2}}{2}$ donc $\ln(-h(-1/2)) = \dfrac{3}{2} - \ln(2) > 1 - \ln(2) > 0$ car $2 \leqslant e$
donc $-h(-1/2) > 1$ d'où $h(-1/2) < -1 = h(\rho)$
comme h est strictement croissante sur $]-\infty,1[$ alors $-1/2 < \rho$
d'un autre côté $h(-1/4) = -\dfrac{e^{5/4}}{4}$
donc $\ln(-h(-1/4)) = \dfrac{5}{4} - 2\ln(2) \leqslant \dfrac{5}{4} - \dfrac{26}{20} = -\dfrac{1}{20} < 0$ car $\ln 2 \geqslant \dfrac{13}{20}$
donc $h(-1/4) > h(\rho)$
On a bien $\boxed{\rho \text{ dans l'intervalle }]-1/2,-1/4[}$

8) **a)** Comme $e^{nz} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(nz)^k}{k!}$, d'après l'énoncé ; on a l'existence de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{n^k}{k!} z^{k-n}$ car

$$z^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^k$$

d'où

$$(ze^{1-z})^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n} = e^{-nz} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^k = e^{-nz} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{k!}$$

et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{k!} = e^{nz} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(nz)^k}{k!} = e^{nz} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(nz)^k}{k!} = e^{nz} - S_n(nz)$$

On a bien l'égalité : $\boxed{1 - e^{-nz} T_n(z) = 1 - e^{-nz} S_n(nz) = (ze^{1-z})^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n}}$

b) Pour $k \geqslant n+1$, on a $\left| \frac{n^k}{k!} z^{k-n} \right| \leqslant \frac{n^k}{k!}$

et $\sum_{k \geqslant n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}$ est une série convergente (en prenant $z = 1$ dans la question précédente)

donc à l'aide de la question précédente et comme $\left| ze^{1-z} \right| \leqslant 1$ et $|z| \leqslant 1$:

$$\left| 1 - e^{-nz} T_n(z) \right| = \left| ze^{1-z} \right|^n e^{-n} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n} \right| \leqslant e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} |z|^{k-n} \leqslant e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}$$

On obtient : $\boxed{\left| 1 - e^{-nz} T_n(z) \right| \leqslant 1 - e^{-n} T_n(1)}$ car $1 - e^{-n} T_n(1) = (1e^{1-1})^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} 1^{k-n}$

c) Par l'absurde si on avait $T_n(z) = 0$, on aurait $1 \leqslant 1 - e^{-n} T_n(1)$ d'après la question précédente donc $e^{-n} T_n(1) \leqslant 0$ donc $T_n(1) \leqslant 0$ ce qui est absurde

On en déduit que $\boxed{T_n(z) \neq 0}$

9) En reprenant le calcul du 3)a), on a pour $m \in \mathbb{N}$: $S_{2m+1}(X) = \sum_{p=0}^{m} \left(\frac{X^{2p}}{(2p)!} + \frac{X^{2p+1}}{(2p+1)!} \right)$

Donc $S_{2m+1}(-2m-1) = \sum_{p=0}^{m} \frac{(2m+1)^{2p}}{(2p+1)!} (2p + 1 - 2m - 1)$

donc pour n impair, on a $S_n(-n) < 0$ donc $-n < \alpha_n$ (admis par l'énoncé et vu en 3)

ainsi $-n < \alpha_n < 0$ en utilisant les variations de S_n vues au 2) or $0 = S_n(\alpha_n) = T_n(\alpha_n/n)$

donc d'après la contraposée de la question 8 : $|\alpha_n/n| > 1$ ou $|\alpha_n/n \exp(1 - \alpha_n/n)| > 1$

ainsi $|\alpha_n| > n$ ou $|h(\alpha_n/n)| > 1$

donc $|h(\alpha_n/n)| > 1$ et ainsi $h(\alpha_n/n) < -1 = h(\rho)$ car $-1 < \alpha_n/n < 0$

donc $\alpha_n/n < \rho$ d'où $\boxed{\alpha_n \in]-n, n\rho[}$

10) La fonction exp est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On peut donc utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre n. Soit $u \in \mathbb{R}$. On a

$$\exp(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(-u)}{k!} (0+u)^k + \int_{-u}^{0} \frac{(0-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t$$

donc $1 = e^{-u} \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} + \int_{-u}^{0} \frac{(-t)^n}{n!} e^t \, \mathrm{d}t$

On effectue dans l'intégrale le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$: $x = -t$; $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$

ainsi $1 = e^{-u} S_n(u) - \int_{u}^{0} \frac{x^n}{n!} e^{-x} \, \mathrm{d}t$ d'où $\boxed{e^{-u} S_n(u) = 1 + \frac{1}{n!} \int_{u}^{0} t^n e^{-t} \, \mathrm{d}t}$

11) En utilisant la question précédente en $u = \alpha_n$, on a : $0 = 1 + \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{\alpha_n}^{0} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Comme $\alpha_n/n = \gamma_n$, on effectue le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$: $nt = x$; $n\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

donc $n\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{\gamma_n}^{0}(nt)^n e^{-nt}\,\mathrm{d}t = -1$ et ainsi $-1 = \dfrac{n^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_{\gamma_n}^{0}\left(te^{-t}\right)^n\,\mathrm{d}t$ d'où $\boxed{\displaystyle\int_{\gamma_n}^{0} h(t)^n\,\mathrm{d}t = -\frac{n!e^n}{n^{n+1}}}$

12) Quand $m \longrightarrow +\infty$, on pose $n = 2m+1$ et $n \longrightarrow +\infty$ et Stirling nous dit que : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

donc $\displaystyle\int_{\gamma_n}^{0} h(t)^n\,\mathrm{d}t \sim -\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ et $-\sqrt{\dfrac{2\pi}{n}} \longrightarrow 0$. D'où $\boxed{\text{la suite } \left(\displaystyle\int_{\gamma_{2m+1}}^{0} h(t)^{2m+1}\,\mathrm{d}t\right)_{m\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$

13) Pour $t \in]-\infty, 0]$, $h(t) \leqslant 0$ donc $h(t)^{2m+1} \leqslant 0$ et $\gamma_{2m+1} \leqslant \rho \leqslant 0$ (voir 9 et 7)

Ainsi les trois intégrales de la relation de Chasles sont négatives :

$$\int_{\gamma_{2m+1}}^{0} h(t)^{2m+1}\,\mathrm{d}t = \int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}\,\mathrm{d}t + \int_{\rho}^{0} h(t)^{2m+1}\,\mathrm{d}t$$

d'où $\displaystyle\int_{\gamma_{2m+1}}^{0} h(t)^{2m+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$

Ainsi, par encadrement, $\boxed{\text{la suite } \left(\displaystyle\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}\,\mathrm{d}t\right)_{m\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$ selon 12

14) Comme h est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$, on a $\forall t \leqslant \rho,\ h(t) \leqslant -1$ et $h(t)^{2m+1} \leqslant -1$

donc pour $m \geqslant 1$, comme on a $\gamma_{2m+1} \leqslant \rho$ on a $\displaystyle\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}\,\mathrm{d}t \leqslant (\rho - \gamma_{2m+1}) \times (-1)$

donc $0 \leqslant \rho - \gamma_{2m+1} \leqslant -\displaystyle\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}\,\mathrm{d}t$

Alors, par encadrement : $\gamma_{2m+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \rho$ selon 13 d'où $\alpha_{2m+1}/(2m+1) \underset{m\to+\infty}{\sim} \rho$

donc $\alpha_{2m+1} \underset{m\to+\infty}{\sim} (2m+1)\rho$ D'où $\boxed{\alpha_{2m+1} \underset{m\to+\infty}{\sim} 2m\rho}$

Exercice 2 (CAPES 2009, partie I)

A. Intégrales de Wallis *cette partie est extrêmement classique, donc à connaître.*

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t$.

1) a) Soit $n \geqslant 0$. On effectue le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - u$.

Donc $\cos(t) = \cos(\pi/2 - u) = \sin(u)$ et $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$.

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n u(-1)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u\,\mathrm{d}u$$

Remarque : t est une variable *muette*, comme k dans $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$. Elle n'existe qu'entre $\displaystyle\int$ et $\mathrm{d}t$.

Ainsi on peut réutiliser cette variable un peu plus loin : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$.

Conclusion : $\boxed{W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t}$

b) $\boxed{W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\cos^n t \geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale, $W_n \geqslant 0$.

Supposons que $W_n = 0$. Puisque $t \mapsto \cos^n t$ est continue, alors $\cos^n t = 0$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$, ce qui est absurde (par exemple $\cos 0 = 1$).

Ainsi, $\boxed{W_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

c) Soit $n \geqslant 2$. Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t) \times (\cos^{n-1} t) \, \mathrm{d}t \\ &= \Big[(\sin t) \times (\cos^{n-1} t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t) \Big(-(n-1)(\sin t)(\cos^{n-2} t)\Big) \, \mathrm{d}t \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)(\cos^{n-2} t) \, \mathrm{d}t = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^{n-2} t \, \mathrm{d}t \\ &= (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\boxed{nW_n = (n-1)W_{n-2}.}$

d) Posons, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = nW_nW_{n-1}$. Alors, d'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n = (nW_n)W_{n-1} = (n-1)W_{n-2}W_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2} = u_{n-1}$$

La suite $(u_n)_n$ est donc géométrique de raison 1 et de premier terme $u_1 = W_0W_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Par conséquent, $\boxed{\text{La suite } u_n = nW_nW_{n-1} \text{ est constante de valeur } \dfrac{\pi}{2}.}$

2) a) Pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leqslant \cos t \leqslant 1$$

Donc pour tout $n \geqslant 0$, $\cos^n t \geqslant 0$ et

$$0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$$

En intégrant cet encadrement, il vient $W_{n+1} \leqslant W_n$, c'est-à-dire $\boxed{(W_n) \text{ est décroissante.}}$

Soit $n \geqslant 2$. D'après 1)c), $nW_n = (n-1)W_{n-2}$. Ainsi, puisque (W_n) est décroissante,

$$\frac{n-1}{n} W_{n-1} \leqslant \frac{n-1}{n} W_{n-2} = W_n \leqslant W_{n-1}$$

Puisque $W_k > 0$ d'après 1)b), il reste à diviser par W_{n-1} et constater que l'inégalité est vraie en $n = 1$: $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1, \ \dfrac{n-1}{n} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1.}$

b) Rappel : Pour des suites non nulles au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim v_n \iff \lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

D'après 1)d), $nW_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc $\dfrac{1}{W_{n-1}} = \dfrac{2}{\pi} nW_n$ et l'encadrement de la question 2)a) s'écrit :

$$\frac{n-1}{n} \leqslant \frac{2}{\pi} nW_n^2 \leqslant 1$$

Donc, par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{\pi} nW_n^2 = 1$, c'est-à-dire $W_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$ et, comme $W_n > 0$,

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

B. Formule de Stirling

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}} \frac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n} = \frac{n^n\sqrt{n}}{(n+1)^n\sqrt{n+1}} e = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} e$$

Donc $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} e}$

b) Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $v_n = \ln\Big(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\Big)$, d'après 1)a)

$$v_n = \ln\left(\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{n-\frac{1}{2}} e\right) = \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big)+1$$

Finalement : $\boxed{v_n = \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big)+1}$

Comme on ne précise pas la formule à obtenir, du moment que vous avez simplifié les factorielles et un peu débroussaillé le reste, ça va. Le but est de faciliter l'obtention du DL à la question suivante.

c) Comme le développement de $\ln(1-u)$ en 0 est $\ln(1-u) = -u - \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$, il vient :

$$\begin{aligned} v_n &= \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big)+1 \\ &= \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)+1 \\ &= -1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + 1 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\ &= -\frac{1}{12n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{v_n = -\dfrac{1}{12n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)}$

d) D'après la question précédente, $|v_n| \sim \dfrac{1}{12}.\dfrac{1}{n^2}$.

Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$).

Ainsi, par équivalent, la série $\sum v_n$ est absolument convergente donc convergente.

Conclusion : $\boxed{\text{La série } \sum v_n \text{ est convergente}}$

e) La série $\sum v_n$ est télescopique : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} (\ln u_k - \ln u_{k-1}) = \ln u_n - \ln u_1 = (\ln u_n) - 1$.

Or cette série converge, donc $\boxed{(\ln u_n)_n \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R}}$

Par continuité de la fonction exponentielle, $\boxed{\text{la suite } u_n = e^{\ln(u_n)} \text{ converge donc aussi}}$, et sa limite est $K = e^{\ell} > 0$.

Comme $K > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = K$ peut s'écrire $u_n \sim K$, c'est-à-dire

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \sim K$$

La compatibilité des équivalent avec le produit nous donne

$$\boxed{n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$$

2) a) Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(p) : \quad W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

est vraie pour tout $p \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ D'après 1)b), $W_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0!}{(2^0 0!)^2}\dfrac{\pi}{2}$, donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

- $\underline{\mathcal{H}_p \Longrightarrow \mathcal{H}_{p+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(p)$ vraie : $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} W_{2(p+1)} &= W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p} \qquad \text{(d'après 1)c))} \\ &= \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2(p+1))^2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2(p+1))!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}(p+1)$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall p \geqslant 0 \qquad W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}}$

D'après 1)d), pour tout $p \geqslant 0$, $W_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{(2p+1)W_{2p}}$. Ainsi

$$W_{2p+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2p+1} \times \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!}\frac{2}{\pi} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

b) D'après B.1)e),

$$p! \sim K p^p e^{-p}\sqrt{p} \qquad \text{et} \qquad (2p)! \sim K 2p^{2p} e^{-2p}\sqrt{2p}$$

Donc d'après B.2)a)

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{K(2p)^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}}{(2^p K p^p e^{-p}\sqrt{p})^2}\frac{\pi}{2} = \frac{K}{K^2} \times \frac{2^{2p}}{2^{2p}} \times \frac{p^{2p+1/2}}{p^{2p+1}} \times \frac{e^{-2p}}{e^{-2p}} \times \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\frac{\pi}{4p}}$$

c) D'après B.2)b), $W_{2p} \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$. De plus, d'après A.2)b), $W_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$.

Donc, par transitivité, $\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}} \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$, et ainsi $\boxed{K = \sqrt{2\pi}}$

En conclusion,

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

C'est ce qu'on appelle la formule de Stirling. *Elle est à votre programme : le résultat est du cours.*