I) Introduction

On introduit i tel que $i^2 = -1$, puis

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Muni de $+$ et $\times$ qui prolongent les opérations de $\mathbb{R}$ (mêmes règles de calcul) $\mathbb{C}$ est un corps[1] qui contient $\mathbb{R}$.
Dans la suite, implicitement, a et b notent des nombres *réels*.

II) Calculs

A) Conjugaison

Le *conjugué* de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$. En résumé, la conjugaison transforme i en $-i$.
La conjugaison est $\boxed{\text{compatible avec toutes les opérations}}$ (i.e. $+$, $-$, $\times$, $\div$) et continue :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^2, \qquad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad \text{et} \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

Et de même pour $-$ et $\div$: comme $\bar{0} = 0$ et $\bar{1} = 1$, la conjugaison conserve l'opposé et l'inverse.

B) Écritures

Il y a 2 écriture de $z \in \mathbb{C}$. Il faut savoir utiliser la bonne écriture selon le problème.

1) $z = a + ib$, forme algébrique

Avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Utile pour $\boxed{+ \text{ et } -}$ / peu pratique pour $\times$ et $\div$: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}$.

$$\text{Si } \begin{cases} z = a + ib \\ z' = a' + ib' \end{cases} \qquad \text{Alors} \quad z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

Exercice 1 **1)** $z = 2 + 3i$, $z' = 1 - i$, calculer $z + z'$.

2) Écrire sous forme $a + ib$ les complexes suivants : $(2 + 3i)(1 - i)$, $\dfrac{1}{2 + 3i}$.

2) $z = re^{i\theta}$, forme trigonométrique

Le cercle trigo est votre ami

Avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Utile pour $\boxed{\times, \div \text{ et puissance}}$ / peu pratique pour $+$ et $-$.

$$\text{Si } \begin{cases} z = re^{i\theta} \\ z' = r'e^{i\theta'} \end{cases} \qquad \text{Alors} \quad zz' = rr'e^{i(\theta + \theta')}$$

Les règles de calcul sur les puissances s'appliquent.

$$\text{Si } z = re^{i\theta} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{Alors} \quad z^n = r^n e^{in\theta}$$

r est le *module* de z : $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ *(c'est la norme euclidienne canonique de (a, b))*
Conjugué : $\bar{z} = re^{-i\theta}$ *(on change i en $-i$).*

Exercice 2 (Module)

Calculer $|2 + 3i|$, $|t^2 - i|$, $|e^{x^2(t^2 - i)}|$ avec $x, t \in \mathbb{R}$.

Si vous avez écrit $z = (\text{un réel positif}) \times e^{i(\text{un réel})}$, vous avez trouvé r et θ. cf $z = 1 + e^{i\theta}$, angle moitié.

Exercice 3 **1)** Calculer $e^{i\pi/3} \times e^{i\pi/6}$, $\dfrac{1}{e^{i\pi/4}}$, $\left(e^{i\pi/3}\right)^7$, i^n selon $n \in \mathbb{N}$.

2) Écrire sous forme $a + ib$ le complexe $2e^{i\pi/6}$. *$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$*

3) Écrire sous forme $re^{i\theta}$ les complexes $1 + i$, $1 + i\sqrt{3}$, $1 + e^{i\theta}$. *Calculer le module, et $z/|z| = \cos\theta + i\sin\theta$.*

1. Entre autre, tout nombre non nul a un inverse.

III) Racines n-ième de l'unité

Propriété 1 ($\mathbb{C}$ algébriquement clos)
Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On appelle racine n-ième de l'unité l'ensemble

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$$

C'est-à-dire, l'ensemble des solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^n = 1$.

Propriété 2
$\operatorname{Card}(\mathbb{U}_n) = n$ et

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \left\{e^{2ik\pi/n} \mid k \in [\![0, n[\![\right\}}$$

Le cercle trigo est toujours votre ami, encore plus qu'avant.
L'argument $\theta = 2k\pi/n$ n'est pas forcément dans $[0, 2\pi[$: par exemple, si on choisit $\theta \in [-\pi, \pi[$, alors on prend $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2k\pi/n \in [-\pi, \pi[$. Pour ne pas avoir deux fois la même racine, il faut imposer θ dans un intervalle semi-ouvert de longueur 2π.

Démonstration.
Cardinal : Le polynôme $P = X^n - 1$ est degré n et $\mathbb{C}$ algébriquement clos, donc P possède n racines sur $\mathbb{C}$ – non nécessairement distinctes.
Les racines de P sont simples : $P' = nX^{n-1}$ n'a que 0 pour racine ($n > 0$), et $P(0) = -1 \neq 0$. Or une racine λ d'ordre au moins 2 vérifie $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$.
Ainsi, P possède n racines distinctes : $\operatorname{Card} \mathbb{U}_n = n$.

Résolution de l'équation : Soit $z = re^{i\theta}$ avec $r \geqslant 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. *Face à une puissance, écriture $z = re^{i\theta}$.*

$$\begin{aligned}
z \in \mathbb{U}_n &\iff r^n e^{in\theta} = 1 = 1 \times e^{i0} \\
&\iff \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 0[2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} & r^n = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, & n\theta = 2k\pi \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} & r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, & \theta = 2k\pi/n \end{cases}
\end{aligned}$$

De plus, $\theta = 2k\pi/n \in [0, 2\pi[$, donc

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \theta < 2\pi &\iff 0 \leqslant 2k\pi < 2n\pi \\
&\iff 0 \leqslant k < n \\
&\iff k \in [\![0, n[\![
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\mathbb{U}_n = \left\{e^{2ik\pi/n} \mid k \in [\![0, n[\![\right\}$$

On note parfois $\omega = e^{2i\pi/n}$, et, dans ce cas, $e^{2ik\pi/n} = \omega^k$:

$$\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k \mid k \in [\![0, n[\![\right\}$$

□

Exercice 4 **1)** Décrire $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_6$ sous forme trigonométrique puis algébrique *après avoir fait un dessin.*

2) Déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z$, la valeur de la somme des racines n-ième de l'unité.