

I) Introduction

On introduit i tel que $i^2 = -1$, puis

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Muni de $+$ et \times qui prolongent les opérations de \mathbb{R} (mêmes règles de calcul) \mathbb{C} est un corps¹ qui contient \mathbb{R} . Dans la suite, implicitement, a et b notent de nombres réels.

II) Calculs

A) Conjugaison

Le *conjugué* de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$. En résumé, la conjugaison transforme i en $-i$.

La conjugaison est compatible avec toutes les opérations (i.e. $+$, $-$, \times , \div) et continue :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^2, \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad \text{et} \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

Et de même pour $-$ et \div : comme $\bar{0} = 0$ et $\bar{1} = 1$, la conjugaison conserve l'opposé et l'inverse.

B) Écritures

Il y a 2 écriture de $z \in \mathbb{C}$. Il faut savoir utiliser la bonne écriture selon le problème.

1) $z = a + ib$, forme algébrique

Avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Utile pour + et - / peu pratique pour \times et \div : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$.

$$\text{Si } \begin{cases} z = a + ib \\ z' = a' + ib' \end{cases} \quad \text{Alors } z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

Exercice 1 1) $z = 2 + 3i$, $z' = 1 - i$, calculer $z + z'$.

2) Écrire sous forme $a + ib$ les complexes suivants : $(2 + 3i)(1 - i)$, $\frac{1}{2 + 3i}$.

2) $z = re^{i\theta}$, forme trigonométrique

Le cercle trigo est votre ami

Avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Utile pour \times , \div et puissance / peu pratique pour $+$.

$$\text{Si } \begin{cases} z = re^{i\theta} \\ z' = r'e^{i\theta'} \end{cases} \quad \text{Alors } zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

Ce sont les règles de calcul sur les puissances.

$$\text{Si } z = re^{i\theta} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{Alors } z^n = r^n e^{in\theta}$$

r est le *module* de z : $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

(c'est la norme euclidienne canonique de (a, b))

Conjugué : $\bar{z} = re^{-i\theta}$

(on change i en $-i$).

Exercice 2 (Module)

Calculer $|2 + 3i|$, $|t^2 + i|$, $|e^{x^2(t^2-i)}|$ avec $x, t \in \mathbb{R}$.

Si vous avez écrit $z = (\text{un réel positif}) \times e^{i(\text{un réel})}$, vous avez trouvé r et θ . cf $z = 1 + e^{i\theta}$, angle moitié.

Exercice 3 1) Calculer $e^{i\pi/3} \times e^{i\pi/6}$, $\frac{1}{e^{i\pi/4}}$, $(e^{i\pi/3})^7$, i^n selon $n \in \mathbb{N}$.

2) Écrire sous forme $a + ib$ le complexe $2e^{i\pi/6}$.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

3) Écrire sous forme $re^{i\theta}$ les complexes $1 + i$, $1 + i\sqrt{3}$, $1 + e^{i\theta}$. Calculer le module, et $z/|z| = \cos \theta + i \sin \theta$.

1. Entre autre, tout nombre non nul a un inverse.

III) Racines n -ième de l'unité

Propriété 1 (\mathbb{C} algébriquement clos)

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On appelle racine n -ième de l'unité l'ensemble

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$$

C'est-à-dire, l'ensemble des solutions, dans \mathbb{C} , de l'équation $z^n = 1$.

Propriété 2

Card(\mathbb{U}_n) = n et

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{2ik\pi/n} \mid k \in \llbracket 0, n \llbracket \right\}$$

Le cercle trigo est toujours votre ami, encore plus qu'avant.

L'argument $\theta = 2k\pi/n$ n'est pas forcément dans $[0, 2\pi[$: par exemple, si on choisit $\theta \in [-\pi, \pi[$, alors on prend $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2k\pi/n \in [-\pi, \pi[$. Pour ne pas avoir deux fois la même racine, il faut imposer θ dans un intervalle semi-ouvert de longueur 2π .

Démonstration.

Cardinal : Le polynôme $P = X^n - 1$ est degré n et \mathbb{C} algébriquement clos, donc P possède n racines sur \mathbb{C} – non nécessairement distinctes.

Les racines de P sont simples : $P' = nX^{n-1}$ n'a que 0 pour racine ($n > 0$), et $P(0) = -1 \neq 0$. Or une racine λ d'ordre au moins 2 vérifie $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$.

Ainsi, P possède n racines distinctes : Card $\mathbb{U}_n = n$.

Résolution de l'équation : Soit $z = re^{i\theta}$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Face à une puissance, écriture $z = re^{i\theta}$.

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{U}_n &\iff r^n e^{in\theta} = 1 = 1 \times e^{i0} \\ &\iff \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 0[2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r^n = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad n\theta = 2k\pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = 2k\pi/n \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, $\theta = 2k\pi/n \in [0, 2\pi[$, donc $0 \leq \theta < 2\pi \iff 0 \leq 2k\pi < 2n\pi$

$$\iff 0 \leq k < n$$

$$\iff k \in \llbracket 0, n \llbracket$$

En conclusion,

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{2ik\pi/n} \mid k \in \llbracket 0, n \llbracket \right\}$$

On note parfois $\omega = e^{2i\pi/n}$, et, dans ce cas, $e^{2ik\pi/n} = \omega^k$:

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \omega^k \mid k \in \llbracket 0, n \llbracket \right\}$$

□

Exercice 4 1) Décrire \mathbb{U}_4 et \mathbb{U}_6 sous forme trigonométrique puis algébrique *après avoir fait un dessin.*

2) Déterminer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z$, la valeur de la somme des racines n -ième de l'unité.