I) Intégration

Variations, limite et équivalent de la suite $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$. Savoir étudier une suite définie par une intégrale. Savoir obtenir un équivalent à partir d'un encadrement.

Nature de la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$. Pour $t \in [e, +\infty[$, posons $f(t) = \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$.

- Théorème de comparaison :

  f est dérivable sur $[e, +\infty[$, et $f'(t) = -\frac{1}{t^2(\ln t)^\beta} + \frac{-\beta}{t^2(\ln t)^{\beta+1}} = -\frac{(\ln t)+\beta}{t^2(\ln t)^{\beta+1}}$

  Donc pour $t \in [e, +\infty[$ tel que $t > e^{-\beta}$, $f'(t) < 0$ et f décroissante.
  Ainsi f est positive, continue et décroissante (au delà de $e^{-\beta}$), donc on peut appliquer le théorème de comparaison séries / intégrales :

  $$\sum f(n) \text{ et } \int_e^{+\infty} f(t) \, dt \text{ sont de même nature.}$$

- Nature de l'intégrale :

  Pour $\beta \neq 1$, $\int_e^x f(t) \, dt = \left[\frac{(\ln t)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_e^x = \frac{(\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1} - \frac{1}{-\beta+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} -\frac{1}{-\beta+1} & \text{si } \beta > 1 \\ +\infty & \text{si } \beta < 1 \end{cases}$

  Pour $\beta = 1$, $\int_e^x f(t) \, dt = [\ln(\ln(t))]_e^x = \ln(\ln x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

  Donc $\int_e^x f(t) \, dt$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

- Conclusion : La série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Soit $\alpha \in]0,1[$. Nature de la série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ et équivalent des sommes partielles (exercice 24.1). À l'aide d'une comparaison série / intégrale, savoir obtenir des équivalents de restes ou de sommes partielles dans les séries.

Convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$. Savoir étudier la convergence d'une fonction qui n'est pas intégrable.

II) Algèbre linéaire

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f définie par $f(M) = -M + \mathrm{Tr}\,(M)A$. Montrer que f est un endomorphisme, et selon la valeur de $\mathrm{Tr}\, A$, déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.

1)
- $\forall M_1, M_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda M_1 + M_2) = ... = \lambda f(M_1) + f(M_2)$. Donc f est linéaire
- $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \underbrace{-M}_{\in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\underbrace{\mathrm{Tr}\,(M)}_{\in\mathbb{R}} A}_{\in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

  Donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme}}$

2) Si $\mathrm{Tr}\, A \neq 1$.

- Ker f :

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Ker} f &\implies f(M) = 0 \\ &\implies -M + \operatorname{Tr}(M)A = 0 \\ &\implies \operatorname{Tr}(-M + \operatorname{Tr}(M)A) = \operatorname{Tr}(0) = 0 \\ &\implies -\operatorname{Tr}(M) + \operatorname{Tr}(M)\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(M)(\underbrace{-1 + \operatorname{Tr}(A)}_{\neq 0}) = 0 \\ &\implies \operatorname{Tr}(M) = 0 \end{aligned}$$

Or $f(M) = 0$: $-M + \operatorname{Tr}(M)A = -M = 0$. Donc $M = 0$.
Donc $\operatorname{Ker} f \subset \{0\}$.
De plus $\{0\} \subset \operatorname{Ker} f$ (sous-espace vectoriel). Conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \{0\}}$$

- Im f : f est un *endomorphisme* injectif *en dimension finie* donc f est bijectif et surjectif :

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

3) Si $\operatorname{Tr} A = 1$.

- Ker f : Montrons que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(A)$.

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Ker} f &\implies f(M) = 0 \\ &\implies -M + \operatorname{Tr}(M)A = 0 \\ &\implies M = \operatorname{Tr}(M)A \in \operatorname{Vect}(A) \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Vect}(A)$.
Réciproquement,

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Vect}(A) &\implies \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad M = \lambda A \\ &\implies \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(M) = f(\lambda A) = \lambda f(A) = \lambda(-A + \underbrace{\operatorname{Tr}(A)}_{=1} A) = 0 \\ &\implies M \in \operatorname{Ker} f \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Vect}(A) \subset \operatorname{Ker} f$. Conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(A)}$$

- Im f :
  - Montrons que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$.

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Im} f &\implies \exists N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad M = f(N) \\ &\implies \exists N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \operatorname{Tr}(M) = \operatorname{Tr}(-N + \operatorname{Tr}(A)N) = 0 \\ &\implies M \in \operatorname{Ker} \operatorname{Tr} \end{aligned}$$

  Donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$.
  - Le théorème du rang pour f s'écrit $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) - \dim(\operatorname{Ker} f) = n^2 - 1$.
  Comme $\operatorname{Tr} \neq 0$ est une forme linéaire non nulle, $\dim(\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}) = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) - \dim(\operatorname{Im} \operatorname{Tr}) = n^2 - 1$.
  - D'après ci-dessus, $\begin{cases} \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} \operatorname{Tr} \\ \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}) \end{cases}$ donc

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}}$$

Pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$**,** $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$**.** Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $AB = C = (c_{ij})$: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. $\mathrm{Tr}\,(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$.
- Soit $BA = D = (d_{ij})$: $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$. $\mathrm{Tr}\,(BA) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}$.

$$\mathrm{Tr}\,(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ik} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \mathrm{Tr}\,(BA)$$

$\nearrow$ commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$ $\uparrow$ changement de variable $k, i = i, k$ $\nwarrow$ changement d'ordre de sommation

CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ **soit diagonalisable.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ les sous-espaces-propres associés.

u diagonalisable $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ Il existe une base $\mathscr{B}'$ telle que sa matrice $D = \mathrm{Mat}\,(u, \mathscr{B}', \mathscr{B}')$ soit diagonale

i.e. une base de vecteurs propres

$\Longleftrightarrow \dim E = \dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_k}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \chi_u \text{ scindé} \\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)\ \alpha = \dim E_\lambda \end{cases}$

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$**.** $\Big[\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, u(y)\rangle = 0\Big] \Longrightarrow u = 0$**.** Et sa version matricielle.

Version endomorphismes : Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, u(y)\rangle = 0 &\Longrightarrow \forall y \in E,\ [\forall x \in E,\ \langle x, u(y)\rangle = 0] \\ &\Longrightarrow \forall y \in E,\ u(y) \in E^{\perp} = \{0\} \\ \text{Ou bien : on choisit } x = u(y) \text{ et } \|u(y)\|^2 &= 0 \text{ donc } u(y) = 0 \\ &\Longrightarrow \forall y \in E,\ u(y) = 0 \\ &\Longrightarrow u = 0 \qquad \text{L'application nulle} \end{aligned}$$

Version matricielle : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^T A Y = 0 &\Longrightarrow \forall Y \in \mathbb{R}^n,\ [\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \langle X, AY\rangle = 0] \\ &\Longrightarrow \forall Y \in \mathbb{R}^n,\ AY \in (\mathbb{R}^n)^{\perp} = \{0\} \\ \text{Ou bien : on choisit } X = AY \text{ et } \|AY\|^2 &= 0 \text{ donc } AY = 0 \\ &\Longrightarrow \forall Y \in \mathbb{R}^n,\ AY = 0 \\ &\Longrightarrow \text{L'application } Y \mapsto AY \text{ est l'application nulle.} \\ &\Longrightarrow \text{Donc sa matrice est nulle : } A = 0 \end{aligned}$$

III) Probabilités

Commencer par décrire $X(\Omega)$. Utiliser le système complet d'événements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$.
Décrire les événements avant de passer au calcul des probabilités, au moins au brouillon.
$(X = x, Y = y)$ signifie $(X = x) \cap (Y = y)$.

Grenouille. Soit X le nombre d'oeufs pondu par la grenouille, et Y le nombre d'oeufs éclot.
$X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Comme $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Comme chaque oeuf éclot avec une loi $\mathscr{B}(p)$ indépendante, k oeufs sachant qu'il y en a n pondus éclosent selon une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, n]\!] \qquad P(Y = k \mid X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

La formule des probabilités totales nous donne, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$\begin{aligned}
P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, Y = k) && (X = n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ système complet d'événements} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n)P(Y = k \mid X = n) && \text{Formule des probabilités totales, et } k \leqslant n \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-k)!}(1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda}\frac{p^k\lambda^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}(1-p)^n && \text{Or } \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\big(\lambda(1-p)\big)^n}{n!} = e^{\lambda(1-p)} \\
&= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Donc $Y \sim \mathscr{P}(\lambda p)$.

Loi de $X + Y$ lorsque $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ espace probabilisé.
$(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Comme $(X = k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
P(X + Y = n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k, X + Y = n) && \text{Formule des probabilités totales} \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X = k, Y = n - k) && \text{Somme jusqu'à } n \text{ car } Y \geqslant 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Y = n - k) && X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{X + Y \sim \mathscr{P}(\lambda + \mu)}$

Loi de $Z = \min(X, Y)$ lorsque $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $Y \sim \mathscr{G}(q)$, avec $p, q \in]0, 1[$.
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ espace probabilisé.
$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ Soit $n \in N^*$ fixé. Comme

$$(Z \geqslant n) = (X \geqslant n) \cap (Y \geqslant n)$$

il vient, par indépendance de X et Y,

$$P(Z \geqslant n) = P(X \geqslant n)P(Y \geqslant n)$$

Or $P(X \geqslant n) = (1-p)^{n-1}$ et $P(Y \geqslant n) = (1-q)^{n-1}$: dans la modélisation comme temps du premier succès, ce sont les événements « il n'y a aucun succès jusqu'au rang $n-1$ ». Donc

$$P(Z \geqslant n) = [(1-p)(1-q)]^{n-1}$$

De plus, comme $[\![n, +\infty[\![= \{n\} \cup [\![n+1, +\infty[\![$,

$$(Z \geqslant n) = (Z = n) \cup (Z \geqslant n+1)$$

Les unions sont disjointes, donc

$$P(Z \geqslant n) = P(Z = n) + P(Z \geqslant n+1)$$

Puis

$$P(Z = n) = P(Z \geqslant n) - P(Z \geqslant n+1) = [(1-p)(1-q)]^{n-1}[1-(1-p)(1-q)]$$

Donc $\boxed{Z \sim \mathscr{G}\Big(1-(1-p)(1-q)\Big)}$

Fonctions génératrices Vous devez savoir calculer « rapidement » la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
Pour X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$$

- Bernoulli : Soit $X \sim \mathscr{B}(p)$ avec $p \in [0, 1]$.

$$G_X(t) = P(X = 0) + P(X = 1)t = \boxed{(1-p) + pt}$$

- Binomiale : Soit $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ avec $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.
  On peut effectuer un calcul direct (via la formule du binôme de Newton), ou utiliser le raisonnement suivant : Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ des variable aléatoire discrète mutuellement indépendantes, de même loi $\mathscr{B}(p)$, telles que

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

  Alors, pour tout $t \in [-1, 1]$, $(t^{X_1}, \ldots, t^{X_n})$ sont mutuellement indépendantes, et

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \mathbb{E}\left(t^X\right) \\ &= \mathbb{E}\left(t^{X_1}\right) \times \cdots \times \mathbb{E}\left(t^{X_n}\right) \\ &= \boxed{(1-p+pt)^n} \qquad \text{Car, pour tout } i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{E}\left(t^{X_i}\right) = G_{X_i}(t) = 1-p+pt \end{aligned}$$

- <u>Géométrique</u> : Soit $X \sim \mathscr{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}
\forall t \in [-1,1], \quad G_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}t^n \\
&= pt\sum_{n=0}^{+\infty} \Big[(1-p)t\Big]^n \\
&= \boxed{\frac{pt}{1-(1-p)t}} \\
&= \frac{p}{1-p} \times \frac{(1-p)t}{1-(1-p)t} = \frac{p}{1-p} \times \frac{(1-p)t-1+1}{1-(1-p)t} \\
&= \frac{p}{1-p}\left[-1+\frac{1}{1-(1-p)t}\right]
\end{aligned}$$

Cette dernière écriture peut être plus pratique pour calculer G'_X, puis $\mathbb{E}(X)$.

- <u>Poisson</u> : Soit $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\forall t \in [-1,1], \quad G_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}t^n \\
&= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Big[\lambda t\Big]^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}e^{\lambda t} \\
&= \boxed{e^{\lambda(t-1)}}
\end{aligned}$$

IV) Séries entières

Rayon et somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{ch}(n)}{n}x^{2n}$.

<u>Rayon</u> :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{\operatorname{ch}(n)}{n}x^{2n}$.

$$\begin{aligned}
\forall x \neq 0 \qquad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \left|\frac{\operatorname{ch}(n+1)x^{2n+2}n}{(n+1)\operatorname{ch}(n)x^{2n}}\right| \\
&= \frac{(e^{n+1}+e^{-(n+1)})n}{(e^n+e^{-n})(n+1)}|x|^2 \\
&\sim \frac{e^{n+1}n}{e^n n}|x|^2 \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} e|x|^2
\end{aligned}$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert,

- Si $e|x|^2 > 1$, $\sum |u_n|$ diverge grossièrement, donc $\sum u_n$ diverge ;
- Si $e|x|^2 < 1$, $\sum u_n$ converge absolument.

Conclusion

$$\boxed{R = \frac{1}{\sqrt{e}}}$$

Somme : Notons $f(x)$ la somme de la série entière en x.

Le rayon est fini, donc il faut chercher dans la famille géométrique.

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right[, \qquad \begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}\,(n)}{n} x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2n} x^{2n} \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n x^{2n}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n} x^{2n}}{n}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(ex^2)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^{-1}x^2)^n}{n}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[\ln\left(1 - ex^2\right) + \ln\left(1 - e^{-1}x^2\right)\right] \end{aligned}$$

Montrons que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$. Étudions la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

Rayon :Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

$$\forall x \neq 0 \qquad \begin{aligned} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \left|\frac{(-1)^{n+2} x^{2n+3}}{(n+1)(2n+3)} \frac{n(2n+1)}{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}\right| \\ &= \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} |x|^2 \\ &\sim \frac{2n^2}{2n^2} |x|^2 \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|^2 \end{aligned}$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert,

- Si $|x| > 1$, $\sum |u_n|$ diverge grossièrement, donc $\sum u_n$ diverge ;
- Si $|x| < 1$, $\sum u_n$ converge absolument.

Conclusion

$$\boxed{R = 1}$$

Somme : Pour tout $x \in]-1,1[$, notons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} \\ &= \ln(1+x^2) \end{aligned}$$

Donc en primitivant,

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = f(0) + \int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$$

Effectuons une intégration par parties avec $\begin{cases} u = \ln(1+t^2) & u' = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ v = t & v' = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) &= \Big[t\ln(1+t^2)\Big]_0^x - \int_0^x t\frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or $\dfrac{t^2}{1+t^2} = \dfrac{t^2+1-1}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$, donc

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) &= x\ln(1+x^2) - 2\left[t - \mathrm{Arctan}\,(t)\right]_0^x \\ &= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\,\mathrm{Arctan}\,(x) \end{aligned}$$

Étude au bord : Étudions la limite lorsque $x \to 1$.

- La fonction $g(x) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\,\mathrm{Arctan}\,(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. En particulier,
$$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1,1]$, posons $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}x^{2n+1}$.
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \|u_n\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |u_n(x)| = \frac{1}{n(2n+1)} \sim \frac{1}{2n^2}$$
Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge d'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.
Ainsi, $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-1,1]$.
Or, de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $[-1,1]$ car polynomiale.
Donc, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, $f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue sur $[-1,1]$.
Par conséquent,
$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$$
- Conclusion : comme $f = g$ sur $]-1,1[$ d'après le point précédent, il vient
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} &= \lim_{x\to 1, x<1} f(x) && \text{Par continuité de } f \text{ en } 1 \\ &= \lim_{x\to 1, x<1} g(x) && \text{Car } f = g \text{ sur }]-1,1[\\ &= g(1) && \text{Par continuité de } g \text{ en } 1 \\ &= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

V) Topologie et calcul différentiel

$\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé borné dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on le muni de $\|.\|_\infty$.

- Montrons que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé.
Le produit $\begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A,B) \mapsto AB \end{cases}$ est bilinéaire donc continue (dimension finie).
La transposition est linéaire (et en dimension finie) donc continue.
Ainsi, $f : \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^T M \end{cases}$ est continue comme composée de fonctions continue.
De plus, $\{I_n\}$ est fermé (critère séquentiel, par exemple, si la preuve en est demandée).
Donc $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une fonction continue.

- Montrons que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est borné : Soit $M = (m_{ij}) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.
  Par définition de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, la famille des vecteurs colonnes de M forme une base orthonormée dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique. En particulier, ils sont de norme (euclidienne) 1 :

$$\forall j \in [\![1, n]\!] , \qquad \| \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix} \|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}^2 = 1$$

  D'où
$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \qquad |m_{ij}| \leqslant 1$$

  Ainsi, en passant à la borne supérieure,
$$\|M\|_\infty = \sup_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} |m_{ij}| \leqslant 1$$

  Donc $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est borné.

Conclusion : $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé, borné dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on peut choisir la norme que l'on veut pour montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé borné. Le choix de la norme n'intervient d'ailleurs pas pour montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Pour montrer borné, on aurait aussi pu choisir $\|.\|_2$ (borné par $\sqrt{n}$), ou tout autre norme.