

I) Intégration

Variations, limite et équivalent de la suite $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$. Savoir étudier une suite définie par une intégrale. Savoir obtenir un équivalent à partir d'un encadrement.

Nature de la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ **en fonction de** $\beta \in \mathbb{R}$. Pour $t \in [e, +\infty[$, posons $f(t) = \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$.

- Théorème de comparaison :

$$f \text{ est dérivable sur } [e, +\infty[, \text{ et } f'(t) = -\frac{1}{t^2(\ln t)^\beta} + \frac{-\beta}{t^2(\ln t)^{\beta+1}} = -\frac{(\ln t) + \beta}{t^2(\ln t)^{\beta+1}}$$

Donc pour $t \in [e, +\infty[$ tel que $t > e^{-\beta}$, $f'(t) < 0$ et f décroissante.

Ainsi f est positive, continue et décroissante (au delà de $e^{-\beta}$), donc on peut appliquer le théorème de comparaison séries / intégrales :

$$\sum f(n) \text{ et } \int_e^{+\infty} f(t) \, dt \text{ sont de même nature.}$$

- Nature de l'intégrale :

$$\text{Pour } \beta \neq 1, \int_e^x f(t) \, dt = \left[\frac{(\ln t)^{-\beta+1}}{-\beta+1} \right]_e^x = \frac{(\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1} - \frac{1}{-\beta+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} -\frac{1}{-\beta+1} & \text{si } \beta > 1 \\ +\infty & \text{si } \beta < 1 \end{cases}$$

$$\text{Pour } \beta = 1, \int_e^x f(t) \, dt = [\ln(\ln(t))]_e^x = \ln(\ln x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc $\int_e^x f(t) \, dt$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

- Conclusion : La série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Soit $\alpha \in]0, 1[$. **Nature de la série** $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ **et équivalent des sommes partielles (exercice 24.1)**. À l'aide d'une comparaison série / intégrale, savoir obtenir des équivalents de restes ou de sommes partielles dans les séries.

Convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$. Savoir étudier la convergence d'une fonction qui n'est pas intégrable.

II) Algèbre linéaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **et** f **définie par** $f(M) = -M + \text{Tr}(M)A$. **Montrer que** f **est un endomorphisme, et selon la valeur de** $\text{Tr} A$, **déterminer** $\text{Ker } f$ **et** $\text{Im } f$.

- 1) • $\forall M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda M_1 + M_2) = \dots = \lambda f(M_1) + f(M_2)$. Donc f est linéaire

$$\bullet \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \underbrace{-M}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\text{Tr}(M)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{A}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Donc f est un endomorphisme

- 2) Si $\text{Tr } A \neq 1$.

- Ker f :

$$\begin{aligned}
 M \in \text{Ker } f &\implies f(M) = 0 \\
 &\implies -M + \text{Tr}(M)A = 0 \\
 &\implies \text{Tr}(-M + \text{Tr}(M)A) = \text{Tr}(0) = 0 \\
 &\implies -\text{Tr}(M) + \text{Tr}(M)\text{Tr}(A) = \text{Tr}(M)\underbrace{(-1 + \text{Tr}(A))}_{\neq 0} = 0 \\
 &\implies \text{Tr}(M) = 0
 \end{aligned}$$

Or $f(M) = 0 : -M + \text{Tr}(M)A = -M = 0$. Donc $M = 0$.

Donc $\text{Ker } f \subset \{0\}$.

De plus $\{0\} \subset \text{Ker } f$ (sous-espace vectoriel). Conclusion :

$$\boxed{\text{Ker } f = \{0\}}$$

- Im f : f est un *endomorphisme* injectif en dimension finie donc f est bijectif et surjectif :

$$\boxed{\text{Im } f = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

3) Si $\text{Tr } A = 1$.

- Ker f : Montrons que $\text{Ker } f = \text{Vect}(A)$.

$$\begin{aligned}
 M \in \text{Ker } f &\implies f(M) = 0 \\
 &\implies -M + \text{Tr}(M)A = 0 \\
 &\implies M = \text{Tr}(M)A \in \text{Vect}(A)
 \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } f \subset \text{Vect}(A)$.

Réciproquement,

$$\begin{aligned}
 M \in \text{Vect}(A) &\implies \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad M = \lambda A \\
 &\implies \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(M) = f(\lambda A) = \lambda f(A) = \lambda(-A + \underbrace{\text{Tr}(A)}_{=1}A) = 0 \\
 &\implies M \in \text{Ker } f
 \end{aligned}$$

Donc $\text{Vect}(A) \subset \text{Ker } f$. Conclusion :

$$\boxed{\text{Ker } f = \text{Vect}(A)}$$

- Im f :

- Montrons que $\text{Im } f \subset \text{Ker } \text{Tr}$.

$$\begin{aligned}
 M \in \text{Im } f &\implies \exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad M = f(N) \\
 &\implies \exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}(M) = \text{Tr}(-N + \text{Tr}(A)N) = 0 \\
 &\implies M \in \text{Ker } \text{Tr}
 \end{aligned}$$

Donc $\text{Im } f \subset \text{Ker } \text{Tr}$.

- Le théorème du rang pour f s'écrit $\dim(\text{Im } f) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim(\text{Ker } f) = n^2 - 1$.

Comme $\text{Tr} \neq 0$ est une forme linéaire non nulle, $\dim(\text{Ker } \text{Tr}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim(\text{Im } \text{Tr}) = n^2 - 1$.

- D'après ci-dessus, $\left\{ \begin{array}{l} \text{Im } f \subset \text{Ker } \text{Tr} \\ \dim(\text{Im } f) = \dim(\text{Ker } \text{Tr}) \end{array} \right.$ donc

$$\boxed{\text{Im } f = \text{Ker } \text{Tr}}$$

Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $AB = C = (c_{ij}) : c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$. $\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$.
- Soit $BA = D = (d_{ij}) : d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$. $\text{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^n d_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki}$.

$$\text{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}b_{ik} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \text{Tr}(AB)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{commutativité de la} \\ \text{multiplication dans } \mathbb{R}}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{changement} \\ \text{de variable} \\ k, i = i, k}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{changement d'ordre de} \\ \text{sommation}}}$

CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ **soit diagonalisable.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ les sous-espaces-propres associés.

u diagonalisable $\stackrel{\text{déf}}{\iff}$ Il existe une base \mathcal{B}' telle que sa matrice $D = \text{Mat}(u, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ soit diagonale
i.e. une base de vecteurs propres

$$\iff E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$$

$$\iff \dim E = \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_k}$$

$$\iff \begin{cases} \chi_u \text{ scindé} \\ \forall \lambda \in \text{Sp}(u) \quad \alpha = \dim E_\lambda \end{cases}$$

$$\iff \exists P \in \mathbb{K}[X] \text{ scindé à racines simples tel que } P(u) = 0$$

Si A **et** B **sont semblables, alors** $\chi_A = \chi_B$. **(cours)** Supposons A et B semblables : soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \det(xI_n - A) \\ &= \det(xPI_nP^{-1} - PBP^{-1}) && \text{Car } PP^{-1} = I_n \\ &= \det[P(xI_n - B)P^{-1}] \\ &= \det(P) \det(xI_n - B) \det(P)^{-1} && \text{Car } \det \text{ est compatible avec le produit matriciel} \\ &= \chi_B(x) \end{aligned}$$

Tr(A) **est somme des valeurs propres (même complexes) de** A **avec multiplicité. (cours)**

Sur \mathbb{C} , algébriquement clos, χ_A est scindé donc A est trigonalisable : soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire telle que $A = PTP^{-1}$.

Par un calcul direct de $\chi_A(x) = \chi_T(x) = \det(xI_n - T)$, la diagonale de T contient les valeurs propres de A , comptées avec multiplicité. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les termes diagonaux de T .

L'invariance de la trace par changement de base donne $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(T) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $[\forall (x, y) \in E^2, \langle x, u(y) \rangle = 0] \implies u = 0$. **Et sa version matricielle.**

Version endomorphismes : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, \langle x, u(y) \rangle = 0 &\implies \forall y \in E, [\forall x \in E, \langle x, u(y) \rangle = 0] \\ &\implies \forall y \in E, u(y) \in E^\perp = \{0\} \end{aligned}$$

Ou bien : on choisit $x = u(y)$ et $\|u(y)\|^2 = 0$ donc $u(y) = 0$

$$\implies \forall y \in E, u(y) = 0$$

$$\implies u = 0$$

L'application nulle

Version matricielle : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, X^T AY = 0 &\implies \forall Y \in \mathbb{R}^n, [\forall X \in \mathbb{R}^n, \langle X, AY \rangle = 0] \\ &\implies \forall Y \in \mathbb{R}^n, AY \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\} \end{aligned}$$

Ou bien : on choisit $X = AY$ et $\|AY\|^2 = 0$ donc $AY = 0$
 $\implies \forall Y \in \mathbb{R}^n, AY = 0$
 \implies L'application $Y \mapsto AY$ est l'application nulle.
 \implies Sa matrice est nulle : $A = 0$

III) Probabilités

Commencer par décrire $X(\Omega)$. Utiliser le système complet d'événements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$.

Décrire les événements avant de passer au calcul des probabilités, au moins au brouillon.

$(X = x, Y = y)$ signifie $(X = x) \cap (Y = y)$.

Grenouille. Soit X le nombre d'oeufs pondus par la grenouille, et Y le nombre d'oeufs éclos.
 $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Comme $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

Comme chaque oeuf éclos avec une loi $\mathcal{B}(p)$ indépendante, k oeufs sachant qu'il y en a n pondus éclosent selon une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(Y = k | X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

La formule des probabilités totales nous donne, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, Y = k) && (X = n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ système complet d'événements} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n) P(Y = k | X = n) && \text{Formule des probabilités totales, et } k \leq n \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (1-p)^n && \text{Or } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} = e^{\lambda(1-p)} \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \end{aligned}$$

Donc $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.

Loi de $X + Y$ lorsque $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) espace probabilisé.

$(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Comme $(X = k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
 P(X + Y = n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k, X + Y = n) && \text{Formule des probabilités totales} \\
 &= \sum_{k=0}^n P(X = k, Y = n - k) && \text{Somme jusqu'à } n \text{ car } Y \geq 0 \\
 &= \sum_{k=0}^n P(X = k)P(Y = n - k) && X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
 &= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\
 &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\
 &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!}
 \end{aligned}$$

Donc $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

Loi de $Z = \min(X, Y)$ lorsque $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(q)$, avec $p, q \in]0, 1[$.

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) espace probabilisé.

$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Comme

$$(Z \geq n) = (X \geq n) \cap (Y \geq n)$$

il vient, par indépendance de X et Y ,

$$P(Z \geq n) = P(X \geq n)P(Y \geq n)$$

Calcul de $P(X \geq n)$: ce sont des sommes infinies, mais de termes positifs.

$$\begin{aligned}
 P(X \geq n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} P(X = k) && \text{Union disjointe } (X = n) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} (X = k) \\
 &= \sum_{k=n}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} \\
 &= p \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{k+n-1} \\
 &= p(1-p)^{n-1} \frac{1}{1-(1-p)} \\
 &= (1-p)^{n-1}
 \end{aligned}$$

Et, de même, $P(Y \geq n) = (1-q)^{n-1}$.

Remarquons que, dans la modélisation comme temps du premier succès, l'événement $(X \geq n)$ est « il n'y a aucun succès jusqu'au rang $n - 1$ ».

Donc

$$P(Z \geq n) = [(1-p)(1-q)]^{n-1}$$

De plus, comme $\llbracket n, +\infty \llbracket = \{n\} \cup \llbracket n + 1, +\infty \llbracket$,

$$(Z \geq n) = (Z = n) \cup (Z \geq n + 1)$$

Les unions sont disjointes, donc

$$P(Z \geq n) = P(Z = n) + P(Z \geq n + 1)$$

Puis

$$P(Z = n) = P(Z \geq n) - P(Z \geq n + 1) = [(1 - p)(1 - q)]^{n-1} [1 - (1 - p)(1 - q)]$$

Donc $Z \sim \mathcal{G}(1 - (1 - p)(1 - q))$

Autre méthode, plus directe, mais avec un peu plus de calculs :

$$(Z = n) = [(X = n) \cap (Y \geq n)] \cup [(X \geq n) \cap (Y = n)]$$

Si $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\min(x, y) \geq n$, cela signifie $[x = n \text{ et } y \geq n]$, ou $[x \geq n \text{ et } y = n]$.

Puis on utilise $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= P[(X = n) \cap (Y \geq n)] + P[(X \geq n) \cap (Y = n)] - P([(X = n) \cap (Y \geq n)] \cap [(X \geq n) \cap (Y = n)]) \\ &= P(X = n)P(Y \geq n) + P(X \geq n)P(Y = n) - P((X = n) \cap (Y = n)) \quad \text{Car } X \perp\!\!\!\perp Y \\ &= p(1 - p)^{n-1}(1 - q)^{n-1} + (1 - p)^{n-1}q(1 - q)^{n-1} - p(1 - p)^{n-1}q(1 - q)^{n-1} \\ &= (p + q - pq)[(1 - p)(1 - q)]^{n-1} \end{aligned}$$

Donc $Z \sim \mathcal{G}(p + q - pq)$ — on remarque que $p + q - pq = 1 - (1 - p)(1 - q)$.

Fonctions génératrices Vous devez savoir calculer « rapidement » la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

Pour X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} ,

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$$

- Bernoulli : Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0, 1]$.

$$G_X(t) = P(X = 0) + P(X = 1)t = (1 - p) + pt$$

- Binomiale : Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

On peut effectuer un calcul direct (via la formule du binôme de Newton), ou utiliser le raisonnement suivant : Soit (X_1, \dots, X_n) des variable aléatoire discrète mutuellement indépendantes, de même loi $\mathcal{B}(p)$, telles que

$$X = X_1 + \dots + X_n$$

Alors, pour tout $t \in [-1, 1]$, $(t^{X_1}, \dots, t^{X_n})$ sont mutuellement indépendantes, et

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \mathbb{E}(t^X) \\ &= \mathbb{E}(t^{X_1}) \times \dots \times \mathbb{E}(t^{X_n}) \\ &= (1 - p + pt)^n \end{aligned} \quad \text{Car, pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{E}(t^{X_i}) = G_{X_i}(t) = 1 - p + pt$$

- Géométrie : Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned}
 \forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}t^n \\
 &= pt \sum_{n=0}^{+\infty} [(1-p)t]^n \\
 &= \boxed{\frac{pt}{1 - (1-p)t}} \\
 &= \frac{p}{1-p} \times \frac{(1-p)t}{1 - (1-p)t} = \frac{p}{1-p} \times \frac{(1-p)t - 1 + 1}{1 - (1-p)t} \\
 &= \frac{p}{1-p} \left[-1 + \frac{1}{1 - (1-p)t} \right]
 \end{aligned}$$

Cette dernière écriture peut être plus pratique pour calculer G'_X , puis $\mathbb{E}(X)$.

- Poisson : Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
 \forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} t^n \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[\lambda t]^n}{n!} \\
 &= e^{-\lambda} e^{\lambda t} \\
 &= \boxed{e^{\lambda(t-1)}}
 \end{aligned}$$

IV) Séries entières

Rayon et somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{ch}(n)}{n} x^{2n}$.

Rayon :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{\text{ch}(n)}{n} x^{2n}$.

$$\begin{aligned}
 \forall x \neq 0 \quad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \left| \frac{\text{ch}(n+1)x^{2n+2}n}{(n+1)\text{ch}(n)x^{2n}} \right| \\
 &= \frac{(e^{n+1} + e^{-(n+1)})n}{(e^n + e^{-n})(n+1)} |x|^2 \\
 &\sim \frac{e^{n+1}n}{e^n n} |x|^2 \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e|x|^2
 \end{aligned}$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert,

- Si $e|x|^2 > 1$, $\sum |u_n|$ diverge grossièrement, donc $\sum u_n$ diverge ;
- Si $e|x|^2 < 1$, $\sum u_n$ converge absolument.

Conclusion

$$R = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Somme : Notons $f(x)$ la somme de la série entière en x .

Le rayon est fini, donc il faut chercher dans la famille géométrique.

$$\begin{aligned} \forall x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{e}} \right[, \quad f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{ch}(n)}{n} x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2n} x^{2n} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n x^{2n}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n} x^{2n}}{n} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(ex^2)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^{-1}x^2)^n}{n} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\ln(1 - ex^2) + \ln(1 - e^{-1}x^2) \right] \end{aligned}$$

Montrons que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$. Étudions la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

Rayon : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0 \quad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \left| \frac{(-1)^{n+2} x^{2n+3}}{(n+1)(2n+3)} \frac{n(2n+1)}{(-1)^{n+1} x^{2n+1}} \right| \\ &= \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} |x|^2 \\ &\sim \frac{2n^2}{2n^2} |x|^2 \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|^2 \end{aligned}$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert,

- Si $|x| > 1$, $\sum |u_n|$ diverge grossièrement, donc $\sum u_n$ diverge ;
- Si $|x| < 1$, $\sum u_n$ converge absolument.

Conclusion

$$R = 1$$

Somme : Pour tout $x \in]-1, 1[$, notons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, f est \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} \\ &= \ln(1 + x^2) \end{aligned}$$

Donc en primitivant,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x \ln(1 + t^2) dt$$

Effectuons une intégration par parties avec $\begin{cases} u = \ln(1+t^2) & u' = \frac{2t}{1+t^2} \\ v = t & v' = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) &= [t \ln(1+t^2)]_0^x - \int_0^x t \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= x \ln(1+x^2) - 2 \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

Or $\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{t^2+1-1}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$, donc

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) &= x \ln(1+x^2) - 2[t - \text{Arctan}(t)]_0^x \\ &= x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \text{Arctan}(x) \end{aligned}$$

Étude au bord : Étudions la limite lorsque $x \rightarrow 1$.

- La fonction $g(x) = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \text{Arctan}(x)$ est définie et continue sur \mathbb{R} . En particulier,

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1, 1]$, posons $u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|u_n\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |u_n(x)| = \frac{1}{n(2n+1)} \sim \frac{1}{2n^2}$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge d'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.

Ainsi, $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-1, 1]$.

Or, de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $[-1, 1]$ car polynomiale.

Donc, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, $f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue sur $[-1, 1]$.

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$$

- Conclusion : comme $f = g$ sur $] -1, 1[$ d'après le point précédent, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} &= \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) && \text{Par continuité de } f \text{ en } 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} g(x) && \text{Car } f = g \text{ sur }] -1, 1[\\ &= g(1) && \text{Par continuité de } g \text{ en } 1 \\ &= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Montrons que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(4n+1)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Développons en série entière $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = (1-x^4)^{-1/2}$:

- Pour tout $u \in]-1, 1[$, $(1+u)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} u^n$.

Soit $\alpha = -1/2$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $u = -x^4 \in]-1, 1[$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!} (-x^4)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n b_n}{n!} x^{4n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Avec } b_n &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right) \\ &= (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2} \\ &= \frac{(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \prod_{k=1}^n (2k)}{2^n \prod_{k=1}^n (2k)} \\ &= \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n!} \end{aligned}$$

Rajoutons les termes manquants pour avoir une factorielle

Un nombre pair est divisible par 2 : $\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n \prod_{k=1}^n k = 2^n n!$

$$\text{D'où } \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^{4n}.$$

Somme : D'après le théorème d'intégration terme à terme des séries entières,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n(4n+1)} \binom{2n}{n} x^{4n+1}$$

Étude au bord : Étudions la limite lorsque $x \rightarrow 1$.

- Sous réserve d'existence, $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$, posons $u_n(x) = \frac{1}{4^n(4n+1)} \binom{2n}{n} x^{4n+1}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|u_n\|_{\infty} = \sup_{x \in [0,1]} |u_n(x)| = \frac{1}{4^n(4n+1)} \binom{2n}{n}$$

Or, d'après Stirling, $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, donc

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{n!^2} \\ &\sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} \\ &\sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \|u_n\|_{\infty} \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi n^{3/2}}}.$$

Or $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge d'après Riemann ($\alpha = 3/2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum \|u_n\|_{\infty}$ converge.

Ainsi, $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 1]$.

Or, de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $[0, 1]$ car polynomiale.

Donc, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur $[0, 1]$.

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n(4n+1)} \binom{2n}{n}$$

• Conclusion : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(4n+1)}$

On peut aussi appliquer le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions sans convergence uniforme :

Étude au bord (bis) : Attention, la série considérée n'est pas la même !

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1[$, posons $u_n(x) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^{4n}$.

- $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ d'après ci-dessus.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n intégrable sur $[0, 1[$, et $\int_0^1 |u_n(t)| dt = \frac{1}{4^n(4n+1)} \binom{2n}{n}$.
- Comme $\frac{1}{4^n(4n+1)} \binom{2n}{n} \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi n^{3/2}}}$, d'après Riemann ($\alpha = 3/2 > 1$) et par théorème de comparaison, $\sum \int_0^1 |u_n(t)| dt$ est une série convergente.

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt$$

C'est-à-dire $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(4n+1)}$

V) Topologie et calcul différentiel

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on le muni de $\|\cdot\|_\infty$.

- Montrons que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé.

Le produit $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) \mapsto AB \end{cases}$ est bilinéaire donc continue (dimension finie).

La transposition est linéaire (et en dimension finie) donc continue.

Ainsi, $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^T M \end{cases}$ est continue comme composée de fonctions continue.

De plus, $\{I_n\}$ est fermé (critère séquentiel, par exemple, si la preuve en est demandée).

Donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une fonction continue.

- Montrons que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné : Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Par définition de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, la famille des vecteurs colonnes de M forme une base orthonormée dans \mathbb{R}^n euclidien canonique. En particulier, ils sont de norme (euclidienne) 1 :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left\| \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n m_{ij}^2 = 1$$

D'où

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad |m_{ij}| \leq 1$$

Ainsi, en passant à la borne supérieure,

$$\|M\|_\infty = \sup_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} |m_{ij}| \leq 1$$

Donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné.

Conclusion : $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé, borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on peut choisir la norme que l'on veut pour montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé borné. Le choix de la norme n'intervient d'ailleurs pas explicitement pour montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé. Pour montrer borné, on aurait aussi pu choisir $\|\cdot\|_2$ (borné par \sqrt{n}), ou toute autre norme.