Table des matières

I) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

1) Défintions

2) Propriétés

II) Applications géométriques

A) Courbes

1) Définitions

2) Application aux lignes de niveau

Définition 1
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.
On appelle ligne de niveau les courbes Γ_λ d'équation

$$f(x, y) = \lambda$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 1
Si $V : U \to \mathbb{R}$ représente un potentiel, $V(x, y) = \lambda$ représente les équipotentielles.
Si $V(x, y) = x^2 + y^2$, alors les Γ_λ sont des cercles de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{\lambda}$ si $\lambda > 0$.

Propriété 1
Soit $\begin{cases} f : U \to \mathbb{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \\ M(x_0, y_0) \in U \text{ tel que } \nabla f(x_0, y_0) \neq 0 \end{cases}$
Alors $\nabla f(x, y)$ est orthogonal à $\Gamma_\lambda : f(x, y) = \lambda$, où $\lambda = f(x_0, y_0)$, orienté selon les valeurs de f croissantes.

Démonstration. Soit $g(x, y) = f(x, y) - \lambda$. Alors :

- $g(x, y) = 0$ est une équation de Γ_λ,
- $\nabla g = \nabla f$

D'après le théorème précédent, comme $\nabla g(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, $\nabla f(x_0, y_0)$ est un vecteur normal de la tangente, *i.e.* un vecteur normal à Γ en $M(x_0, y_0)$.
Géométriquement : on coupe la surface $z = f(x, y)$ par le plan $z = \lambda$ (figure 1)
Effectuons un développement limité de f à l'ordre 1 en $a = (x_0, y_0)$:

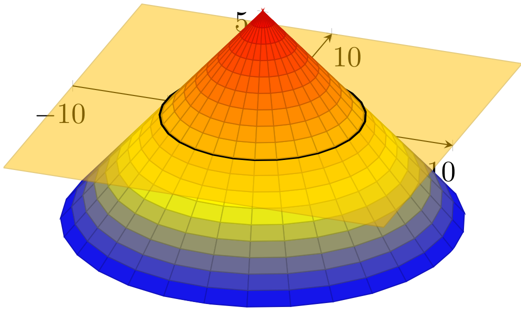


FIGURE 1 – ligne de niveau

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + o(\|h\|)$$

Avec h colinéaire à $\nabla f(a)$, dans le sens de $\nabla f(a)$: $h = t\nabla f(a)$ avec $t > 0$.

$$\begin{aligned}
&= f(a) + \langle \nabla f(a), t\nabla f(a)\rangle + o(\|t\nabla f(a)\|) \\
&= f(a) + t\langle \nabla f(a), \nabla f(a)\rangle + o(t\|\nabla f(a)\|) && \text{car } t \in \mathbb{R} \\
&= f(a) + t\underbrace{\|\nabla f(a)\|^2}_{>0} + \underbrace{o(t)}_{\xrightarrow[t\to 0]{}0} && \text{car } \nabla f(a) \neq 0 \\
&> f(a)
\end{aligned}$$

Donc $\nabla f(a)$ est orienté selon les valeurs de f croissantes. □

B) Surfaces

Ici, $p = 3$: $f \colon \begin{cases} U & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto f(x,y,z) \end{cases}$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

1) Définitions

Définition 2 (Surface)
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.
On appelle surface d'équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$ l'ensemble

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in U \mid f(x,y,z) = 0\}$$

Exemple 2 **1)** Plan : $2x - 3y + 5z = 4$.

$$\forall (x,y,z) \in U = \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = 2x - 3y + 5z - 4$$

2) Sphère : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (de rayon 1, de centre $(0,0,0)$).

$$\forall (x,y,z) \in U = \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

3) Autre surface : $y^2 z = x^2$ (parapluie de Whitney).

$$\forall (x,y,z) \in U = \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = x^2 - y^2 z$$

Remarque Si $y \neq 0$, alors $z = \dfrac{x^2}{y^2} \geqslant 0$.
Si $x = y = 0$, alors $(0,0,z) \in \Sigma$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Donc dans le demi espace $z < 0$, la surface est réduite à l'axe (Oz). D'où le terme « parapluie ».

Définition 3
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et Σ la surface associée.
Soit : $\begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$ une courbe $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$, incluse dans U.
La courbe $\mathscr{C}$ est dite « tracée sur Σ » si

$$\forall t \in I \qquad f(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

Exemple 3
Reprenons les exemples qui précèdent :

1) Plan $2x - 3y + 5z = 4$.
$\begin{cases} x(t) = 3t \\ y(t) = 2t \\ z(t) = 4/5 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ est une courbe (une droite, ici) tracée sur le plan :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad 2 \times 3t - 3 \times 2t + 5 \times 4/5 = 4$$

Ou bien $(x(t), y(t), z(t)) = \left(3\cos t, 2\sin t, -\dfrac{6}{5}(\cos t - \sin t) + 4\right)$, $t \in [0, 2\pi]$ (ellipse).

2) Sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:
Pour $r \in [0,1]$ fixé, $\begin{cases} x(t) = r\cos t \\ y(t) = \sqrt{1 - r^2} \\ z(t) = r\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$.

Ou la couture de la balle de tennis : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2}{3}\cos(t) + \dfrac{1}{3}\cos(3t) \\ y(t) = \dfrac{2}{3}\sin(t) - \dfrac{1}{3}\sin(3t) \\ z(t) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin(2t) \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$.

3) Parapluie de Whitney $y^2 z = x^2$:
$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = t \\ z(t) = 4 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ est tracée sur Σ, et même, à $v \in \mathbb{R}$ fixé, $\begin{cases} x(t) = vt \\ y(t) = t \\ z(t) = v^2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.
(ou comme fonction de v, à t fixé : on obtient des paraboles).

Définition 4 (point régulier)
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et Σ la surface associée.
Le point $M(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ est dit régulier si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Remarque 1
C'est exactement comme pour les courbes $f(x, y) = 0$.

Exemple 4
Cherchons les points non réguliers.

2) Sphère :

$$\nabla f(x,y,z) = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

Or $(0,0,0) \notin \Sigma$, donc tous les points de Σ sont réguliers.

3) Parapluie de Whitney :

$$\nabla f(x,y,z)=0 \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-2yz=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-y^2=0 \end{cases} \iff x=y=0 \iff (x,y,z)\in(Oz)$$

Ici, pour tout $z\in\mathbb{R}$, $(0,0,z)\in\Sigma$: $(Oz)\subset\Sigma$. Donc les points de (Oz), qui sont dans Σ, ne sont pas réguliers.

Définition 5 (plan tangent)
Soit $f : U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et Σ la surface associée.
Si $M(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$ est régulier, on appelle plan tangent à Σ en M
le plan $\mathcal{T}_{\Sigma,M}$ passant par M, de vecteur normal $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$.

Remarque 2
Si $\begin{cases}\mathscr{C} \text{ est une courbe tracée sur } \Sigma \\ M\in\mathscr{C} \text{ est régulier} sur \Sigma\end{cases}$
Alors, $\forall t\in I,\ f(x(t),y(t),z(t))=0$.
Cette égalité étant vraie sur un intervalle, on peut dériver à l'intérieur de I : d'après la règle de la chaîne,

$$\forall t\in \mathring{I},\qquad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=0$$

On note (x_0,y_0,z_0) les coordonnées de M, et $t=t_0$ le temps correspondant sur $\mathscr{C}$. En écrivant l'égalité précédent à l'aide de vecteurs :

$$\langle\nabla f(x_0,y_0,z_0),\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)\rangle=0$$

Comme $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ est un vecteur normal de $\mathcal{T}_{\Sigma,M}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{T}_{\mathscr{C},M}$, il vient

$$\mathcal{T}_{\mathscr{C},M}\subset\mathcal{T}_{\Sigma,M}$$

Méthode 1 (Équation de $\mathcal{T}_{\Sigma,M}$)

$$\begin{aligned} P(x,y,z)\in\mathcal{T}_{\Sigma,M} &\iff \langle\nabla f(x_0,y_0,z_0),\overrightarrow{MP}\rangle=0 \\ &\iff \langle\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}\rangle=0\end{aligned}$$

Exemple 5 **1)** Surface Σ d'équation $ax+by+cz=d$, où $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ fixés.
Donc $f(x,y,z)=ax+by+cz-d$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
En tout point de Σ, $\nabla f=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ on retrouve comme plan tangent le plan Σ de départ :

2) Plan tangent en $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ à la sphère $x^2+y^2+z^2=1$.

3) Parapluie de Whitney : plan tangent en un point régulier de l'axe (Oy).

Définition 6
Soit $g : U'\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ où U' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On note Σ la surface d'équation $z=g(x,y)$.
On appelle courbe de coordonnées de Σ les courbes obtenues en fixant $x=x_0$ ou $y=y_0$.

Exemple 6

À $x = x_0$ fixé, la courbe

$$\mathscr{C}_{x_0} \begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = t \\ z(t) = g(x_0, t) \end{cases} \qquad t \in I_{x_0}$$

À $y = y_0$ fixé, la courbe

$$\mathscr{C}_{x_0} \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = y_0 \\ z(t) = g(t, y_0) \end{cases} \qquad t \in I_{y_0}$$

Remarque 3

Ce sont les courbes que trace l'ordinateur, a priori, si on lui demande de représenter le graphe de la fonction g, *i.e.* tracer $z = g(x, y)$.

C'est l'image par g du quadrillage du plan (Oxy) par les droites verticales $(x = x_0)$ et horizontales $(y = y_0)$.

2) Recherche d'extrema

a) Gobal

Définition 7 (Extremum global)

Soit $\begin{cases} f : A \to \mathbb{R} & \text{où } A \subset \mathbb{R}^p \text{ est une partie quelconque}\,; \\ a \in A \end{cases}$

• f admet un maximum global en a $\iff$ $\forall x \in A,\ f(x) \leqslant f(a)\,;$

• f admet un minimum global en a $\iff$ $\forall x \in A,\ f(x) \geqslant f(a).$

Vocabulaire 1

Un extremum (pluriel : extrema) est un maximum ou un minimum.

Théorème 2 (rappel)

Soit A fermé, borné, et $f : A \to \mathbb{R}$ continue.

Alors f est bornée et atteint ses bornes.

C'est-à-dire que f admet un maximum global et un minimum global.

b) Local

Définition 8 (Extremum local)

Soit $\begin{cases} f : A \to \mathbb{R} & \text{où } A \subset \mathbb{R}^p \text{ est une partie quelconque}\,; \\ a \in A \end{cases}$

• f admet un maximum local en a $\iff$ $\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in B(a, \varepsilon) \cap A,\ f(x) \leqslant f(a)\,;$

• f admet un minimum local en a $\iff$ $\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in B(a, \varepsilon) \cap A,\ f(x) \geqslant f(a).$

Exemple 7

Si $p = 1$ et $f : I \to \mathbb{R}$,

Remarque 4

Si f admet un maximum (respectivement, un minimum) global en a, alors f admet un maximum local en a.

Définition 9 (point critique)

Soit $\begin{cases} f : U \to \mathbb{R} \quad \mathscr{C}^1 & \text{où } U \subset \mathbb{R}^p \text{ est un ouvert}\,; \\ a \in U \end{cases}$

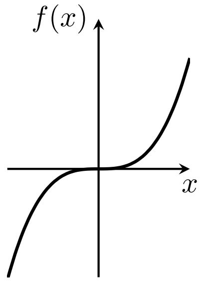
$$\begin{aligned} f \text{ admet un point critique en } a &\iff \mathrm{d}f(a) = 0 \\ &\iff \nabla f(a) = 0 \\ &\iff \forall j \in [\![1, p]\!] \, , \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0 \end{aligned}$$

Exemple 8
$p = 1$, $f : I \to \mathbb{R} \quad \mathscr{C}^1$, avec $I =]\alpha, \beta[$ ouvert.
Les points critiques sont les points où la dérivée s'annule : $f'(t) = 0$.

Propriété 3
Soit $\begin{cases} f : U \to \mathbb{R} \quad \mathscr{C}^1 & \text{où } U \subset \mathbb{R}^p \text{ est un ouvert ;} \\ a \in U \end{cases}$
La fonction f admet un extremum local en $a \Longrightarrow f$ admet un point critique en a.

Exemple 9 **1)** (dessin précédent) On se place sur $]\alpha, \beta[$ (donc $x = \alpha$ est exclu).
Aux extrema locaux, la tangente est désormais toujours horizontale : $f'(t) = 0$.

2) Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t^3 \end{cases}$.
f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: elle n'admet pas d'extrema, même locaux, sur $\mathbb{R}$.
Mais f admet un point critique en $a = 0$: $f'(t) = 3t^2$, donc $f'(0) = 0$.



Remarque 5 **1)** La réciproque est fausse (contre-exemple : $t \mapsto t^3$ sur $U = \mathbb{R}$).
2) L'hypothèse « U ouvert » est fondamentale :

En pratique, on enlèvera systématiquement le bord, et celui-ci sera étudié à part.

Démonstration.

$\square$

Exemple 10 **1)** $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 \end{cases}$

a) *Régularité de f, hypothèses.*
b) *Recherche des points critiques à l'intérieur du domaine de définition.*
c) *Recherche des extrema parmi ces points critiques. Conclusion.*

2) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x^2 - y^2 \end{cases}$

3) $f : \begin{cases} \overline{B(0,1)} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x^2 - y^2 \end{cases}$

a) *Régularité de f, hypothèses.*
b) *Recherche des points critiques à l'intérieur du domaine de définition.*
c) *Recherche des extrema parmi ces points critiques, étude au bord. Conclusion.*

III) Dérivées d'ordre 2

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Remarque 6
Si $f : U \to \mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$, alors $a \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ est une fonction (continue) sur U, et ce pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.
Donc chacune de ces fonctions admet, potentiellement, elle aussi, des dérivées partielles :

$$\forall i \in [\![1, p]\!]\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

Et ainsi de suite.

Définition 10 (fonctions $\mathscr{C}^2$)
Soit $f : U \to \mathbb{R}$.
La fonction f est dite « de classe $\mathscr{C}^2$ » sur U si

- f admet des dérivées partielles sur U :

$$\forall j \in [\![1, p]\!]\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_j} : U \to \mathbb{R}$$

- $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ admet des dérivées partielles sur U

$$\forall j \in [\![1, p]\!]\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) : U \to \mathbb{R}$$

  et celles-ci sont continues.

Notation 2
$\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ se note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ou $\partial_{ij} f$.

Remarque 7
Il y a donc p^2 dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Exemple 11
Toute fonction polynomiale en les $x_1, \ldots, x_p$ est $\mathscr{C}^2$: les dérivées partielles existent (*cf.* les fonctions $\mathscr{C}^1$) et sont polynomiales, donc $\mathscr{C}^1$ et leurs dérivées partielles – d'ordre – sont aussi polynomiales, donc continues.

Définition – Propriété 4
On note $\mathscr{C}^2(U, \mathbb{R})$ l'ensemble

$$\{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ est } \mathscr{C}^2 \text{ sur } U\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ stable par produit.

Propriété 5 (composition à gauche)
Soit $\begin{cases} f : U \to \mathbb{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^2 \\ \varphi : I \to \mathbb{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^2 \text{ telle que } f(U) \subset I \text{ intervalle de } \mathbb{R} \end{cases}$
Alors $\varphi \circ f$ est $\mathscr{C}^2$ sur U.

C'est le sens facile : on compose par une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Démonstration. On regarde les fonction de 1 variable $x_j \mapsto \varphi(f(x))$, qui sont deux fois dérivables comme composée de fonctions deux fois dérivables, et on vérifie que les dérivées secondes partielles obtenues sont bien continues, comme produit et composées de fonctions continues ou $\mathscr{C}^k$ avec $k \geqslant 2$. □

Théorème 6 (de Schwarz)
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.
Les dérivées partielles ne dépendent pas de l'ordre de dérivation :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Exemple 12
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 y + xy - xy^3$. Vérifier que $\partial_{12} f = \partial_{21} f$.

Remarque 8 **1)** Comme $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ est un opérateur de dérivation sur un espace de fonction, il n'y a, a priori, aucune raison pour que $\partial_i \circ \partial_j = \partial_j \circ \partial_i$.

2) Si on range les dérivées partielles $\partial_{ij} f$ dans une matrice

$$H = \begin{pmatrix} \partial_{11} f & \cdots & \partial_{1p} f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{p1} f & \cdots & \partial_{pp} f \end{pmatrix}$$

celle-ci est symétrique : $H(a)$ est une matrice symétrique réelle pour tout $a \in U$.

Méthode 2
Changement de variable : composition à droite.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \qquad \text{Posons } g = f \circ \varphi$$

Si f et φ sont $\mathscr{C}^2$, alors $g = f \circ \varphi$ est $\mathscr{C}^2$ et

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \\ \Longrightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= \\ &= \\ &= \\ \Longrightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} &= \end{aligned}$$

En exercice : commencer par écrire $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dots$ puis $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ etc.

Remarque 9
En pratique φ sera affine – donc les dérivées secondes seront nulles – ou un passage en polaire. Le calcul du laplacien en polaire est laissé en exercice.

FIN DU CHAPITRE