Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 14 mars 2022

Épreuve de Mathématiques 9

Correction

Le rapport du jury concernant l'épreuve E3A PC 2021 est joint à la suite de la correction des exercices 1 à 3.

Exercice 1 (E3A PC 2021)

1) Appliquons le critère des séries alternées : pour $n \geqslant 1$, posons $a_n = \frac{1}{n}$.

- Pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \geqslant 0$,
- La suite (a_n) est décroissante,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Donc, d'après le critère des séries alternées,

$$\boxed{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ converge}}$$

2) **a)** Posons

$$\forall x \in [0,1[\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n(x) = x^{2n}(1-x)$$

<u>Convergence simple de $\sum f_n$</u> : Pour $x \in]-1,1[$, la série géométrique s'écrit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$, donc

$$\forall x \in [0,1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}\right](1-x) = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}$$

Ainsi, $\sum f_n$ converge simplement vers $S : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur $[0,1[$.

<u>Intégrabilité de f_n</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est polynomiale donc intégrable sur le segment $[0,1]$, donc sur $[0,1[$.

<u>Convergence de $\sum \int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. $f_n \geqslant 0$ et

$$\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2n} - x^{2n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

Ainsi, $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \sim \frac{1}{4n^2}$. D'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$), $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Donc, par théorème de comparaison, $\sum \int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge.

<u>Conclusion</u>

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $[0,1[$.
- $\sum f_n$ converge simplement vers S continue par morceaux sur $[0,1[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $[0,1[$ et $\sum \int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge.

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions, S est intégrable sur $[0,1[$ et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x == \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}}$$

b) *Vous êtes bloqué face à des séries ? Essayez d'écrire les premiers termes avec des pointillés, pour voir. Ici, on vient donc de d'intéresser à*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

Et on nous demande d'en déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

D'après la question précédente, pour $N\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x\right) &= \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\\ &= \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2n+1}-\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2n+2}\\ &= \sum_{\substack{k=1,\\ k \text{ impair}}}^{2N+1}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{k=1,\\ k \text{ pair}}}^{2N+2}\frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{2N+2}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\end{aligned}$$

Donc, en passant à la limite pour $N\to+\infty$, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Or $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$. Finalement,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)}$$

3) Rayon de convergence : Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\geqslant 1$, posons $u_n = (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$.

$$\forall x\neq 0,\qquad \begin{aligned}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}n}{(n+1)(-1)^{n+1}x^n}\right|\\ &= \frac{n}{n+1}|x|\\ &\sim |x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|\end{aligned}$$

Donc, d'après le critère de D'Alembert,

- Si $|x|<1$, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.
- Si $|x|>1$, $\sum |u_n|$ diverge grossièrement donc $\sum u_n$ diverge.

Ainsi, la série entière $\sum (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$ a pour rayon $\boxed{R=1}$.
Le domaine de définition $\mathscr{D}_\varphi$ de φ vérifie $]-1,1[\subset \mathscr{D}_\varphi \subset [-1,1]$.
Étude au bord :

- En $x=1$: d'après la question 1, $\varphi(1)$ existe, et d'après la question 2b,

$$\boxed{\varphi(1)=\ln(2)}$$

- En $x=-1$, $(-1)^{n+1}\dfrac{(-1)^n}{n}=-\dfrac{1}{n}$ est le terme général d'une série divergente (Riemann $\alpha=1$, la série harmonique). Donc φ n'est pas définie en -1.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } \varphi \text{ est } \mathscr{D}_\varphi =]-1,1]}$$

4) **a)** *Le calcul se fait directement. Pour une fraction rationnelle, si elle est déjà décomposée en éléments simples*[1]*, on fait apparaître du u'/u avec $u=x-a$ ou $u=x^2+ax+b$ (primitive en $\ln|u|$), ou bien du $1/(1+x^2)$ (primitive en Arctan).*

$$\frac{1-x}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\,\frac{2x}{1+x^2}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= [\operatorname{Arctan} x]_0^1-\frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1\\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2)\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2)}$$

b) Convergence simple : Soit $x\in[0,1[$ fixé.
De même qu'au 2a, on reconnaît une somme géométrique et $\sum(-1)^n f_n$ converge absolument simplement sur $[0,1[$ vers

$$\sum_{n=0}(-1)^n x^{2n}(1-x)=(1-x)\sum_{n=0}(-x^2)^n=\frac{1-x}{1+x^2}\qquad \forall x\in[0,1[$$

Théorème d'intégration terme à terme : Comme $|(-1)^n f_n|=|f_n|$, on utilise le 2a.
La fonction f_n est intégrable sur $[0,1[$ donc $(-1)^n f_n$ aussi.
$\sum\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge donc $\sum\int_0^1 |(-1)^n f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ aussi.
Ainsi :

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(-1)^n f_n$ est continue par morceaux sur $[0,1[$.
- $\sum(-1)^n f_n$ converge simplement vers $f : x\mapsto \dfrac{1-x}{1+x^2}$ continue par morceaux sur $[0,1[$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(-1)^n f_n$ est intégrable sur $[0,1[$ et $\sum\int_0^1 |(-1)^n f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge.

1. C'est le cas ici : les racines de $1+x^2$ ne sont pas réelles

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions, f est intégrable sur $[0,1[$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}$$

<u>Conclusion</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 2a,

$$(-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration terme à terme cette série converge et, d'après 4a,

$$\boxed{S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2}$$

Exercice 2 (E3A PC 2021)

1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse, F_1 est une primitive de f :

$$\boxed{F_1 \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } F_1' = f}$$

2) Par définition, f est intégrable sur $]-\infty,-1]$ donc $K = \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

D'après ci-dessus, la fonction $F_1 : x \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie, $\mathscr{C}^1$ et vérifie $F_1' = f$.

Donc, par Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Comme $F = K + F_1$,

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est définie et de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ et } F' = f}$$

Une primitive, c'est $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $a \in I$. Donc il faut découper. Ce qui nous permet de rédiger l'existence, en choisissant bien a.

3) Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction f_k est continue donc continue par morceaux sur $I =]-\infty,-1]$.
<u>Étude en $-\infty$</u> : Par croissance comparée,

$$t^2 f_k(t) = t^{k+2}e^t \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$$

Donc $f_k(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par parité $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
Puis, par théorème de comparaison,

$$\boxed{\text{La fonction } f_k : t \to t^k e^t \text{ est intégrable sur }]-\infty,-1]}$$

4) <u>Montrons que L est bien définie</u> : Soit $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ *(c'est-à-dire $f = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k e_k$)*. Ainsi,

$$\forall t \in]-\infty,-1] \qquad f(t)e^t = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k(t)$$

Donc, d'après 3, $t \mapsto f(t)e^t$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$ comme combinaison linéaire de fonctions intégrables sur $]-\infty, -1]$. *On peut aussi prendre un équivalent, et trouver $a_d t^d e^t$ où d est le degré de f.*
Par conséquent, g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{-1} f(t)e^t \, \mathrm{d}t + e^{-x} \int_{-1}^{x} f(t)e^t \, \mathrm{d}t$$

est bien définie sur $\mathbb{R}$.
<u>Linéarité</u> : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in E_n$, par linéarité de l'intégrale il vient

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad L(\lambda f + g)(x) &= e^{-x} \int_{-\infty}^{x} [\lambda f(t) + g(t)] \, e^t \, \mathrm{d}t \\ &= \lambda e^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(t)e^t \, \mathrm{d}t + e^{-x} \int_{-\infty}^{x} g(t)e^t \, \mathrm{d}t \\ &= \lambda L(f)(x) + L(g)(x) \end{aligned}$$

Donc L est linéaire. En conclusion,

$$\boxed{L \text{ est bien définie, et linéaire sur } E_n}$$

5) Comme $t \mapsto f(t)e^t$ est continue et intégrable sur $]-\infty, -1]$, nous pouvons appliquer le résultat de la question 2, qui nous donne que $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)e^t \, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $t \mapsto f(t)e^t$.
Ainsi, g est dérivable comme produit de fonction $\mathscr{C}^1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -e^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(t)e^t \, \mathrm{d}t + e^{-x} f(x) e^x \\ &= -g(x) + f(x) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{g \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } y' + y = f(x)}$$

6) Soit $f \in E_n$. D'après la question précédente,

$$f \in \text{Ker } L \iff g = L(f) = 0 \Longrightarrow g = 0 \text{ solution de } y' + y = f$$

En injectant dans l'équation différentielle il vient $f = 0$.

$$\boxed{\text{Ker } L = \{0\}}$$

7) **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} L(e_0)(x) &= e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e_0(t)e^t \, \mathrm{d}t & \text{Or } e_0 = 1 \\ &= e^{-x} \left[e^t\right]_{-\infty}^{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{L(e_0) = e_0}$$

b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, et $x \in \mathbb{R}$. *Pour améliorer votre rédaction, cherchez au brouillon* puis *rédigez sur la copie : d'abord l'intégration par parties, puis on se lance dans le calcul et on conclue.*

Intégration par parties : Les fonctions $u : t \mapsto t^{k+1}$ et $v : t \mapsto e^t$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, par croissance comparée,

$$\lim_{t \to -\infty} u(t)v(t) = 0$$

Donc, avec $\begin{cases} u(t) = t^{k+1} & u'(t) = (k+1)t^k \\ v(t) = e^t & v'(t) = e^t \end{cases}$, le théorème d'intégration par parties nous dit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. D'après la question 3, elles convergent, donc, toujours d'après le théorème,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} t^{k+1}e^t\,\mathrm{d}t &= \left[t^{k+1}e^t\right]_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x}(k+1)t^k e^t\,\mathrm{d}t \\ &= x^{k+1}e^x - (k+1)\int_{-\infty}^{x} t^k e^t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Calcul de $L(e_k)$:

$$\begin{aligned}L(e_{k+1})(x) &= e^{-x}\int_{-\infty}^{x} t^{k+1}e^t\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-x}\left[x^{k+1}e^x - (k+1)\int_{-\infty}^{x} t^k e^t\,\mathrm{d}t\right] && \text{D'après ci-dessus} \\ &= e_{k+1} - (k+1)L(e_k)\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,, \quad L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)L(e_k)}$$

c) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad L(e_k) \in E_n$$

est vraie pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

- $\mathcal{H}_0$: D'après 7a, $L(e_0) = e_0 \in E_n$.
- $\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie pour un $k \in [\![0, n-1]\!]$: $L(e_k) \in E_n$.
  D'après 7b, $L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)L(e_k)$.
  Donc $L(e_{k+1}) \in E_n$ comme combinaison linéaire d'éléments de E_n. Ainsi, $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!] \quad L(e_k) \in E_n}$

Par linéarité de L, comme $E_n = \mathrm{Vect}\,(e_0, \ldots, e_n)$, $L(E_n) \subset E_n$:

$$\boxed{L \text{ est un endomorphisme de } E_n}$$

8) Comme $L \in \mathscr{L}(E_n)$ d'après la question précédente, il reste à prouver que L est un isomorphisme. D'après la question 6, $\mathrm{Ker}\ L = \{0\}$. Donc L est injective, or $\dim E_n$ finie, donc L bijective :

$$\boxed{L \text{ est un automorphisme de } E_n}$$

9) **a)** Si $\lambda = 0 \in \mathrm{Sp}\,(L)$, alors $E_0 = \mathrm{Ker}\ L \neq \{0\}$, ce qui n'est pas le cas, d'après la question 6 : par l'absurde,

$$\boxed{\lambda \neq 0}$$

b) Par définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre,

$$L(f) = \lambda f$$

D'après 5, $g = L(f)$ est solution de $y' + y = f$. Donc, comme ici $g = \lambda f$,

$$(\lambda f)' + \lambda f = f$$

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } \lambda y' + (\lambda - 1)y = 0}$$

c) D'après 9a, $\lambda \neq 0$, donc les solutions sont de la forme

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = Ce^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}x}}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

d) Dans les fonctions précédentes, les seules solutions polynomiales correspondent à $\lambda - 1 = 0$:

$$\boxed{\text{Les solution polynomiales de } (\star) \text{ correspondent à } \lambda = 1 \text{ et } y = C, \text{ avec } C \in \mathbb{R} \text{ ou } \lambda \neq 1 \text{ et } y = 0}$$

e)
- Si $\lambda \neq 1$, tout fonction $f \in E_n$ vérifiant $L(f) = \lambda f$ est nulle. Donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}\,(L)$.
- Si $\lambda = 1$, $L(e_0) = 1 \times e_0$ d'après 7a, donc 1 est valeur propre.
  Si f est un vecteur propre pour la valeur propre 1, alors f est solution de $(\star)$ et d'après 9d, f est constante.

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(L) = \{1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id} - L) = \mathrm{Vect}\ e_0}$$

Si L était diagonalisable, alors la matrice de L dans une base de diagonalisation serait $M = I_{n+1}$. Comme $n \geqslant 2 > 0$, $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{id} - L) = \mathrm{Vect}\ e_0 \neq E_n$: $L \neq \mathrm{id}_{E_n}$.

$$\boxed{L \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

10) Pour tout $f \in E_n$, d'après le calcul effectué au 5,

$$D(L(f)) = -L(f) + f$$

Donc $(D + \mathrm{id}) \circ L = \mathrm{id}$. Comme L est inversible, en composant à droite par L^{-1}, il vient

$$\boxed{L^{-1} = D + \mathrm{id}}$$

11) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $D(e_k) = ke_{k-1}$, et $D(e_0) = 0$. Donc

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

12) La matrice M étant triangulaire, les valeurs propres de L^{-1} se lisent sur la diagonales :

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(L^{-1}) = \{1\}}$$

D'autre part, si $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(L^{-1})$ et f un vecteur propre associé, alors

$$L^{-1}(f) = \lambda f \iff f = \lambda L(f)$$

Donc $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(L^{-1}) \iff 1/\lambda \in \mathrm{Sp}\,(L)$ (les valeurs propres sont non nulles car les endomorphismes sont inversibles).

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(L) = \{1\}}$$

Exercice 3 (E3A PC 2021)

Prolonge l'exercice sur les polynômes d'interpolation de Lagrange de la feuille d'algèbre linéaire : vous avez déjà vu tous ces résultats, mais sans produit scalaire.

1)

2) Montrons que $(.|.)$ est un produit scalaire.

- Symétrique : Pour tout $(P, Q) \in E^2$,

$$(P|Q) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)Q(a_j) = \sum_{j=0}^{n} Q(a_j)P(a_j) = (Q|P)$$

  Donc $(.|.)$ est symétrique.

- Bilinéaire : Soit $Q \in E$ fixé. Pour tout $(P_1, P_2) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda P_1 + P_2|Q) = \sum_{j=0}^{n} \Big(\lambda P_1(a_j) + P_2(a_j)\Big)Q(a_j) = \lambda\,(P_1|Q) + (P_2|Q)$$

  Donc $(.|Q)$ est linéaire. Par symétrie, $(.|.)$ est bilinéaire.

- Positive : Pour tout $P \in E$, comme somme de carrés,

$$(P|P) \sum_{j=0}^{n} P(a_j)^2 \geqslant 0$$

  Donc $(.|.)$ est positive.

- Définie positive : Soit $P \in E$ tel que

$$(P|P) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)^2 = 0$$

  Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls :

$$\forall j \in [\![0, n]\!]\,, \qquad P(a_j) = 0$$

  Donc, comme les (a_j) sont 2 à 2 distincts, P a $n+1$ racines.
  Or $P \in \mathbb{R}_n[X]$: $\deg P \leqslant n$. Si $P \neq 0$, il a au plus n racines.
  Donc $P = 0$.
  Ainsi, $(.|.)$ est définie positive.

Conclusion :

$$\boxed{(.|.) \text{ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive donc c'est un produit scalaire}}$$

3) $\boxed{(P|P_0) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)}$

4) **a)**
- Si $i = j$: par définition,

$$L_j(aj) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{a_j - a_k}{a_j - a_k} = 1$$

- Si $i \neq j$:

$$L_j(X) = \frac{X - a_i}{a_i - a_j} \prod_{\substack{k=0\\k\neq i,j}}^{n} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$$

Par conséquent $L_j(a_i) = 0$.

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2\,, \quad L_j(a_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

b) Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]$, $i \neq j$.

$$\begin{aligned}(L_i|L_j) &= \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k) L_j(a_k) \\ &= L_i(a_i)L_j(a_i) && \text{D'après 4a, } L_i(a_k) = 0 \text{ si } k \neq i \\ &= 0 && \text{Car } j \neq i\end{aligned}$$

Donc

$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B} = (L_j)_{j\in[\![0,n]\!]} \text{ est une famille orthogonale pour le produit scalaire } (.|.)}$

c) Vérifions que les vecteurs sont de norme 1 : pour tout $i \in [\![0,n]\!]$,

$$(L_i|L_i) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)^2 = L_i(a_i)^2 = 1$$

Donc $\|L_i\| = 1$.
$\mathscr{B}$ est une base orthonormée : Les vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une famille de $n+1$ vecteurs, orthonormée (4b et ci-dessus), donc non nuls, de E, et $\dim E = n+1$. Ainsi,

$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base orthonormée de } E}$

d) Dans une base orthonormée $(e_i)_i$, pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=0}^{n} (x|e_i)\, e_i$.

Donc, ici, $P = \sum_{i=0}^{n} (P|L_i)\, L_i$. Or, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$,

$$(P|L_i) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)L_i(a_j) = P(a_i)$$

Ainsi,

$$\boxed{P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i, \text{ la composante selon } L_i \text{ de } P \text{ est } P(a_i)}$$

e) Le polynôme $P = \sum_{j=0}^{n} L_j$ a pour composante 1 selon tous les vecteurs de la base, donc $P(a_i) = 1$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.
Ainsi, le polynôme $P - 1$ a $n + 1$ racines en étant de degré inférieur ou égal à n : $P - 1 = 0$. Conclusion :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} L_j = 1}$$

5) a) Soit $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ définie par $f(P) = (P|P_0)$. L'application f est linéaire par définition du produit scalaire, et d'après le calcul effectué à la question 2,

$$H = \text{Ker } f$$

Donc

$$\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$$

Il est toujours très efficace de voir un sous-espace vectoriel comme noyau d'une application linéaire. Mais on pouvait aussi, évidemment, faire la preuve directe : non vide, inclus dans E, stable par combinaison linéaire.

b) Par construction, $H = \{P \in E \mid (P|P_0) = 0\} = (\text{Vect } P_0)^\perp$.
Donc, en dimension finie,

$$\boxed{H^\perp = \text{Vect } P_0}$$

On peut aussi le faire directement sans remarquer que $H = P_0^\perp$, mais dans ce cas on calcule $\dim H$ avant $H^\perp$:

$$\forall P \in H, \quad (1|P) = 0$$

Donc $P_0 = 1 \in H^\perp$: $\text{Vect } P_0 \subset H^\perp$.
L'application f précédente est non nulle ($f(P_0) = n + 1 \neq 0$) à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc $\text{rg } f = 1$. Ainsi, par le théorème du rang, $\dim H = \dim \text{Ker } f = \dim E - 1$.
Comme $E = H \oplus H^\perp$, on en déduit $\dim H^\perp = 1$.
Or $\dim \text{Vect } P_0 = 1$, donc par inclusion et égalité des dimension, $H^\perp = \text{Vect } P_0$.

De plus $E = H \oplus H^\perp$, donc $\dim H = \dim E - \dim H^\perp$:

$$\boxed{\dim H = n}$$

6) a) Déterminons une base orthonormée de $H^\perp$: $e_1 = P_0/\|P_0\|$ convient.

$$\|P_0\|^2 = \sum_{j=0}^{n} 1^2 = n + 1$$

Donc $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. Et la projection p=$p_{H^\perp}(Q)$ sur $H^\perp = \text{Vect } e_1$ s'écrit

$$\boxed{p_{H^\perp}(Q) = (Q|e_1)\, e_1 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} Q(a_j)}$$

b) D'après le cours, $d(Q, H) = \|Q - p_H(Q)\|$, où p_H est la projection orthogonale sur H. Or $Q - p_H(Q)$ est la projection orthogonale sur $H^\perp$, calculée à la question précédente :

$$d(Q, H) = \|p_{H^\perp}(Q)\| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} Q(a_j) \right| \|P_0\|$$

Ainsi, comme $\|P_0\| = \sqrt{n+1}$,

$$\boxed{d(Q, H) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{j=0}^{n} Q(a_j) \right|}$$

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

- Une première remarque importante : les correcteurs ont signalé à plusieurs reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur), **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**.

- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que "il est trivial que ", " par une récurrence immédiate ", etc... rappelons que toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.

- Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire MP.

Nous avons été déçus par le trop grand nombre d'étudiants qui ne maîtrisent pas les notions de base d'algèbre linéaire, d'analyse et qui espèrent venir à bout du sujet grâce à des recettes toutes faites.

Nous constatons aussi une grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont très rapidement abandonnés.

- Enfin, notons une nouvelle fois que les examinateurs ne goûtent guère des arguments bidons ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé.

- Dans certaines copies on trouve beaucoup trop d'abréviations CVU, CVS, CSTP (comparaison de séries à termes positifs) voire des symboles mathématiques en guise d'abréviation...

- La rédaction est souvent inadmissible : les flèches (voir rien du tout) remplacent les phrases, les résultats ne sont pas encadrés, les théorèmes ont des noms aléatoires (lorsqu'ils en ont).

- Certains candidats recopient simplement le résultat demandé en guise de réponse en espérant que cela passe.

- Les convergences d'intégrales et de séries ne sont justifiées que si cela est explicitement demandé.

• Commentaires exercice par exercice

Exercice 1

1. Question en général traitée : attention à ne pas oublier les hypothèses précises d'application du critère spécial des séries alternées.

2. Cela ne doit pas être à l'examinateur de faire le choix des hypothèses énoncées en vrac pour appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

Beaucoup de candidats tentent de prouver la convergence uniforme de la série sur $[0, 1]$ alors que la non continuité de la fonction somme aurait dû les en dissuader.

Enfin, calculer la somme d'une série géométrique relève trop souvent de l'exploit...

3. Trop peu d'étudiants reconnaissent une série entière et répondent à la question.

On a trop souvent trouvé $D =]-1, 1[$, sans que le candidat soit géné lorsqu'on lui demande de calculer $\varphi(1)$!

18/20

4. Rappelons que l'intégration par parties n'est pas la panacée du calcul intégral.

On retrouve ensuite les mêmes problèmes que pour la question 2.

Exercice 2

1. et **2.** Questions faciles si l'on utilise la notion de primitive, notion qui semble mal comprise voire méconnue.

Trop de candidats pensent qu'il s'agit d'une intégrale à paramètre...

3. Soit la continuité de la fonction à intégrer est oubliée, soit c'est elle qui justifie l'intégrabilité sur $]-\infty,-1]$.

Ne pas oublier que toute domination se fait sur des fonctions positives.

4. Question en général bien traitée.

5. et **6.** Questions souvent mal comprise : trop de candidats tentent de résoudre l'équation différentielle $y' + y = f(x)$ et veulent se servir des résultats obtenus pour traiter la question **6.**.

7.1. Question traitée correctement.

7.2. Ne pas oublier qu'il faut justifier l'utilisation d'une intégration par parties.

7.3. On a souvent rencontré une mauvaise justification de l'utilisation de la base canonique pour conclure.

8. Le fait que E_n est de dimension finie n'est que trop peu souvent évoqué.

9. Question en général peu abordée. Le fait de rechercher des solutions polynomiales d'une équation différentielle semble avoir désarçonné beaucoup d'étudiants.

Exercice 3

1. Question en général bien traitée sauf quelques imprécisions pour démontrer le caractère défini du produit scalaire.

2. Pas de problème sur cette question.

3. Questions classiques en général bien traitées.

Cela se gâte à partir de la question **3.4.** et surtout **3.5.**

4.1. Trop d'étudiants ont du mal à montrer que H est un sous-espace vectoriel de E !

4.2. L'orthogonal de H est rarement explicité clairement.

5.1. Les propriétés de la projection orthogonale sont en général bien citées mais on a remarqué de grosses difficultés pour les mettre en oeuvre ici.

5.2. Les relations entre projection orthogonales sur H et projection orthogonale sur $H^{\perp}$ ne sont pas toujours bien maîtrisées.

Exercice 4 (CCINP PSI 2021)

Partie 1 (Quelques propriétés des fonctions f_α)

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n = \dfrac{x^n}{n^\alpha}$.

$$\begin{aligned}\forall x \neq 0, \qquad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \left|\frac{x^{n+1}n^\alpha}{x^n(n+1)^\alpha}\right| \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha |x| \\ &\sim |x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|\end{aligned}$$

Donc, d'après le critère de D'Alembert,

- Si $|x| < 1$, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.
- Si $|x| > 1$, $\sum |u_n|$ diverge grossièrement donc $\sum u_n$ diverge.

Ainsi, la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n^\alpha}$ a pour rayon

$$\boxed{R = 1}$$

2) Par propriété du rayon de convergence, on sait déjà que

$$]-1,1[\subset \mathcal{D}_\alpha \subset [-1,1]$$

Il reste à étudier la convergence en $x = \pm 1$.

- Si $\alpha \in]-\infty, 0]$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ n'est pas nulle ($+\infty$ ou 1), donc

$$\sum \frac{x^n}{n^\alpha} \text{ diverge grossièrement pour } x = \pm 1$$

  Donc, dans ce cas, $\mathcal{D}_\alpha =]-1,1[$.
- Si $\alpha \in]0,1]$:
  - En $x = 1$, $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge comme série de Riemann avec $\alpha \leqslant 1$.
  - En $x = -1$, posons $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant 0$. La suite (a_n) est positive, décroissante et de limite nulle, donc, d'après le critère des séries alternées, $\sum (-1)^n a_n$ converge.

  Donc, dans ce cas, $\mathcal{D}_\alpha = [-1,1[$.
- Si $\alpha \in]1,+\infty[$: les séries $\sum \dfrac{x^n}{n^\alpha}$, pour $x = \pm 1$, convergent absolument comme série de Riemann avec $\alpha > 1$. Ainsi, dans ce cas, $\mathcal{D}_\alpha = [-1,1]$.

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Si } \alpha \in]-\infty,0], & \mathcal{D}_\alpha =]-1,1[\\ \text{Si } \alpha \in]0,1], & \mathcal{D}_\alpha = [-1,1[\\ \text{Si } \alpha \in]1,+\infty[, & \mathcal{D}_\alpha = [-1,1] \end{array}}$$

3) Soit $x \in \mathcal{D}_\alpha$. Si $x \geqslant 0$, $f_\alpha(x) \geqslant 0$ comme somme de termes positifs.
Si $x < 0$, nous allons appliquer un corollaire du critère des séries alternées :
Posons, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{(-x)^n}{n^\alpha}$. La suite (a_n) est positive, décroissante et de limite nulle. Donc $\sum (-1)^n a_n$ vérifie le critère des séries alternées.

En particulier, le reste $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ est du signe du premier terme négligé $(-1)^{n+1}a_{n+1}$. Si on applique ce résultat au reste d'ordre 0, $f_\alpha(x)$ est du signe de $a_1 = x < 0$. Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathcal{D}_\alpha,\ f_\alpha(x) \text{ est du signe de } x}$$

4)
- <u>$\alpha = 0$</u> : On somme la série géométrique de terme général x^n *à partir de* $n = 1$:

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}}$$

- <u>$\alpha = -1$</u> : On reconnaît une dérivée. Pour tout $x \in]-1,1[= \mathcal{D}_\alpha$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
  D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, à l'intérieur du domaine de convergence,

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

  Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad f_{-1}(x) = \frac{x}{(1-x)^2}}$$

- <u>$\alpha = 1$</u> : On reconnaît le développable en série entière du logarithme.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad f_1(x) = -\ln(1-x)}$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1,1] = \mathcal{D}_\alpha$, posons

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n^\alpha}$$

<u>Convergence normale</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n^\alpha} \sup_{x\in[-1,1]} |x|^n = \frac{1}{n^\alpha}$.

Comme $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum \|u_n\|_\infty$ converge : $\sum u_n$ converge normalement sur $[-1,1]$.

<u>Conclusion</u>
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $\mathcal{D}_\alpha$ car polynomiale.
- La série $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément vers f_α sur $\mathcal{D}_\alpha$.

Donc, par théorème de continuité des séries de fonctions,

$$\boxed{\text{La fonction } f_\alpha \text{ est continue sur } \mathcal{D}_\alpha}$$

6) Pour $n \geqslant 2$, la fonction $a \mapsto \dfrac{1}{n^a} = e^{-a\ln n}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n}$$

Soit $x \in [0,1[$, en multipliant par $x^n \geqslant 0$ et en sommant il vient

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = f_1(x) = -\ln(1-x)$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$, donc, par minoration,

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty}$$

7) Par définition,

$$\forall t \in [-1,1], \qquad G_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_\alpha = n)t^n$$

Le domaine de définition impose $\boxed{\alpha > 1}$, et comme $P(\Omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_\alpha = n) = G_\alpha(1)$, il vient

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{f_\alpha(1)}}$$

8) La variable aléatoire X_α admet une espérance si et seulement si $\sum nP(X_\alpha = n)$ converge absolument. Or, par définition de G_α, $P(X_\alpha = n) = \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$, donc on étudie la convergence de la série $\sum \dfrac{\lambda}{n^{\alpha-1}}$. D'après Riemann, elle converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$. Ainsi,

$$\boxed{X_\alpha \text{ admet une espérance si et seulement si } \alpha > 2}$$

Si $\alpha > 2$, $E(X_\alpha)$ est donnée par

$$\boxed{E(X_\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X_\alpha = n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{f_{\alpha-1}(1)}{f_\alpha(1)}}$$

Partie 2 (Un logarithme complexe)

1) $\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}}$

Vous connaissez vos DL usuels, en particulier les premiers termes de $\ln(1+x)$.

2) Rayon de convergence : Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \geqslant 1$, posons $u_n = \dfrac{(-z)^n}{n}$.

$$\forall z \neq 0, \qquad \begin{aligned} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \left|\frac{(-z)^{n+1}n}{(n+1)(-z)^n}\right| \\ &= \frac{n}{n+1}|z| \\ &\sim |z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z| \end{aligned}$$

Donc, d'après le critère de D'Alembert,

- Si $|z| < 1$, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.
- Si $|z| > 1$, $\sum |u_n|$ diverge grossièrement donc $\sum u_n$ diverge.

Ainsi, la série entière $-\sum \dfrac{(-z)^n}{n}$ a pour rayon

$$\boxed{R = 1}$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, $S(x) = \ln(1+x)$ d'après 1. Donc

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \exp(S(x)) = \exp(\ln(1+x)) = 1+x}$$

3) Si $z_0 = 0$, la série étudiée est la série nulle et $\boxed{R = +\infty}$

Sinon, supposons $z_0 \neq 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \geqslant 1$, posons $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{z_0^n}{n}t^n$.

$$\forall t \neq 0, \qquad \begin{aligned} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \left|\frac{(z_0t)^{n+1}n}{(n+1)(z_0t)^n}\right| \\ &= \frac{n}{n+1}|z_0||t| \\ &\sim |z_0||t| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z_0||t| \end{aligned}$$

Donc, d'après le critère de D'Alembert, comme $z_0 \neq 0$,

- Si $|t| < 1/|z_0|$, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.
- Si $|t| > 1/|z_0|$, $\sum |u_n|$ diverge grossièrement donc $\sum u_n$ diverge.

Ainsi, la série entière $\sum (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n$ a pour rayon

$$\boxed{R = \frac{1}{|z_0|}}$$

4) Comme $|z_0| < 1$, $[0, 1] \subset]-R, R[$, et par théorème de dérivation terme à terme des séries entières,

$$\boxed{g \text{ est définie et de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [0, 1]}$$

et, pour $t \in [0, 1]$,

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z_0^n t^{n-1} = z_0 \sum_{n=1}^{+\infty} (-z_0 t)^{n-1} = \frac{z_0}{1 + z_0 t}$$

5) Les fonction exp et g sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ et

$$h' = g' \times \exp \circ g$$

Donc, d'après ci-dessus,

$$\boxed{\forall t \in [0, 1], \quad h'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0} h(t)}$$

6) *On sait que dans le cas z_0 réel, $\exp(S(tz_0)) = 1 + tz_0$ d'après 2. On sait aussi qu'il est strictement interdit de prendre le logarithme d'un complexe sans précautions : c'est ce qu'on est entrain de construire ! Voyons voir si $h(t) = 1 + tz_0$ convient.*

Posons $y(t) = 1 + tz_0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors

$$\forall t \in [0, 1], \qquad y'(t) = z_0 = \frac{z_0}{1 + tz_0} y(t)$$

Donc y est solution de l'équation différentielle précédente. Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy et linéarité de l'équation, l'ensemble des solution est un sous-espace vectoriel de dimension 1. Nous venons donc d'en trouver une base :

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation différentielle sont les } t \mapsto C(1 + tz_0) \text{ avec } C \in \mathbb{C} \text{ fixé}}$$

Comme $h(0) = \exp(S(0)) = \exp(0) = 1$, $C = 1$ et $h(t) = 1 + tz_0$ pour tout $t \in [0, 1]$.
Par conséquent, en $t = 1$, il vient

$$\boxed{\exp(S(z_0)) = z_0 + 1}$$