Épreuve de Mathématiques 9

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Questions de cours

- 1) Citer le théorème de Cauchy linéaire pour un système différentiel.
- 2) On rappelle que j est le nombre complexe : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, où i vérifie $i^2 = -1$.
 - a) Déterminer le module et un argument de j .
 - b) Déterminer la valeur de $s_k = 1 + j^k + j^{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 - c) Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ du système :
$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a + jb + j^2c = 0 \\ a + j^2b + jc = 0 \end{cases}$$
 où a, b et c sont les inconnues.
- 3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Donner avec démonstration l'expression du déterminant de Vandermonde de la matrice :

$$V_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_0^2 & \gamma_1^2 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \gamma_0^{n-1} & \gamma_1^{n-1} & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Le résultat et l'expression obtenus dans la question 3, ne devront plus être utilisés dans la suite du problème.

PARTIE I

Soient $n \geq 3$ un entier naturel, $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1})$ une famille de n éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et :

$$V_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_0^2 & \gamma_1^2 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \gamma_0^{n-1} & \gamma_1^{n-1} & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

- 1) Montrer que s'il existe un couple $(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$ avec $i \neq j$ tel que $\gamma_i = \gamma_j$, alors : $\det(V_\gamma) = 0$.
 2) On suppose les γ_i distincts deux à deux et on note C_j la colonne d'indice j de la matrice ${}^tV_\gamma$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que : $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$.

En utilisant le polynôme $P = \sum_{j=1}^n \lambda_j X^{j-1}$, montrer : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_j = 0$.

Que peut-on en déduire pour $\det(V_\gamma)$? **On ne calculera pas** $\det(V_\gamma)$.

- 3) On suppose toujours que les γ_k sont distincts deux à deux.
 Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction ψ_k par : $x \mapsto e^{\gamma_k x}$.

- a) Soient $(m_k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ un n -uplet de scalaires, et $\Psi = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \psi_k$.

Calculer les dérivées successives de Ψ jusqu'à l'ordre $n-1$.

- b) En déduire que la famille $(\psi_k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ est libre dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

PARTIE II

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y^{(3)} = y$.

- 1) Soit f une solution à valeurs complexes de cette équation.
 a) Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2) vérifiée par la fonction :
 $g = f + f' + f''$.
 b) Résoudre l'équation (E_2) .
 c) En déduire l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation (E_1) .
 2) Soit (S) le système différentiel à coefficients constants $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ et :

$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, où x, y et z sont des fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$.

- a) La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$? dans $M_3(\mathbb{R})$?
 b) Résoudre le système (S) .
 c) Retrouver alors par cette méthode les solutions de l'équation (E_1) obtenues à la question **1.3.** de cette partie.
 3) On considère la série entière réelle $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
 a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière. On note alors, lorsque cela existe,
 $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
 b) Justifier que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
 c) Déterminer les développements en série entière de $\varphi', \varphi'', \varphi^{(3)}$ puis $\varphi^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 d) En utilisant les questions précédentes, déterminer une expression de φ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.
 e) Déterminer une expression de $\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.
 f) Déterminer une expression de $\theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{6n}}{(6n)!}$ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.

PARTIE III

Dans la suite du problème :

- toutes les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 ;

- $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ est un élément de $\mathbb{K}^n$ et $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$.

En outre, lorsque $y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, on note : $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ qui est donc un élément de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$.

Soient :

- (E_α) l'équation différentielle linéaire : $y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}$;
- $\mathcal{S}_\alpha = \left\{ f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{K}), \quad f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{(k)} \right\}$.

1)

- Écrire l'équation différentielle (E_α) à l'aide d'un système différentiel.
- Montrer que si $y \in \mathcal{S}_\alpha$, alors $y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.
- Prouver que $\mathcal{S}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.
- Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_\alpha$.

On prend jusqu'à la fin de cette partie : $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- Écrire l'équation (E_α) dans ce cas.
- Déterminer tous les nombres complexes r pour lesquels la fonction $x \mapsto e^{rx}$ appartient à $\mathcal{S}_\alpha$.
- Donner une base de $\mathcal{S}_\alpha$. (On pourra utiliser des résultats obtenus dans la partie I)
- Soit d l'application qui à $y \in \mathcal{S}_\alpha$ associe $d(y) = y'$.
 - Vérifier que d est un endomorphisme de $\mathcal{S}_\alpha$.
 - L'endomorphisme d est-il bijectif ?
 - L'endomorphisme d est-il diagonalisable ?

PARTIE IV

Dans cette partie, on prend

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (et donc : $\mathcal{S}_\alpha = \left\{ f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{(k)} \right\}$),
- $n = 2p$,
- et on considère l'équation différentielle : $y^{(2p)} = y$ (donc $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$).

On note S_1 (resp. S_2) l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle :

$$y^{(p)} = y \quad (\text{resp. } y^{(p)} = -y)$$

Pour f et g dans $\mathcal{S}_\alpha$, on note : $(f | g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|} (f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t)) dt$.

1) Montrer que cette expression a un sens pour tous f et g de $\mathcal{S}_\alpha$.

On admettra que pour tout f de $\mathcal{S}_\alpha$, on a au voisinage de $+\infty$: $f(t) = O(e^t)$ et au voisinage de $-\infty$: $f(t) = O(e^{-t})$.

2) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{S}_\alpha$.

3) Montrer que S_1 et S_2 sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{S}_\alpha$.

4) *Exemple* : $n = 4$ et $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)!}$.

On admet que f est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

a) Déterminer α de sorte que $f \in \mathcal{S}_\alpha$.

b) Expliciter les projetés orthogonaux de f sur S_1 et sur S_2 .

c) En déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles réelles.

FIN DE L'ÉPREUVE