

Épreuve de Mathématiques 9

Correction

Exercice 1 (d'après CCP PSI 2016)

1 Cas $n = 2$

1.1 Puissances de $A(\alpha, \beta)$

1) Comme

$$A(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha + \alpha \\ \beta + 1 - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A(\alpha, \beta) \text{ pour la valeur propre } 1$$

2) Quitte à se placer sur \mathbb{C} , $A(\alpha, \beta)$ est trigonalisable, avec ses valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et λ_2 sur la diagonale. La trace étant invariante par changement de base,

$$\text{Tr } A(\alpha, \beta) = 1 + \lambda_2 = 1 - \alpha + 1 - \beta$$

Ainsi,

$$\text{L'autre valeur propre de } A(\alpha, \beta) \text{ est } \lambda$$

3) Comme $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ il vient $\lambda \neq 1$.

La matrice $A(\alpha, \beta)$ est donc de taille 2 avec deux valeurs propres distinctes, 1 et $\lambda \neq 1$. Par conséquent,

$$A(\alpha, \beta) \text{ est diagonalisable}$$

Diagonalisation : Les valeurs propres sont de multiplicité 1 donc $\dim E_1 = \dim E_\lambda = 1$.

- Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1$,

$$E_1 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Déterminons $E_\lambda = \text{Ker}(\lambda I_2 - A(\alpha, \beta))$.

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_\lambda &\iff \begin{pmatrix} -\beta & -\alpha \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} X = 0 \\ &\iff \beta x + \alpha y = 0 \end{aligned}$$

Par exemple $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$ est une solution, $X \neq 0$ car $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Comme, là aussi, $\dim E_\lambda = 1$,

$$E_\lambda = \text{Vect} \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

En conclusion,

$$A(\alpha, \beta) = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$$

4) Montrons par récurrence que

$$\mathcal{H}_p : \quad A^p = PD^pP^{-1}$$

est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

- \mathcal{H}_0 : c'est immédiat pour $p = 0$ car $A^0 = I_2$.
- $\mathcal{H}_p \implies \mathcal{H}_{p+1}$: Supposons le résultat vrai au rang $p \geq 0$. On a alors

$$A^{p+1} = A^p A = PD^pP^{-1}PDP^{-1} = PD^{p+1}P^{-1}$$

Donc \mathcal{H}_{p+1} est vraie.

- Conclusion : $\forall p \geq 0 \quad A(\alpha, \beta)^p = PD^pP^{-1}$

Par un pivot de Gauss, $P^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a ainsi

$$\begin{aligned} A^p &= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} 1 & \alpha\lambda^p \\ 1 & -\beta\lambda^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha\lambda^p & \alpha(1 - \lambda^p) \\ \beta(1 - \lambda^p) & \alpha + \beta\lambda^p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$A^p = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha\lambda^p & \alpha(1 - \lambda^p) \\ \beta(1 - \lambda^p) & \alpha + \beta\lambda^p \end{pmatrix}$$

- 5) Si $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$ alors $0 < \alpha + \beta < 2$ et donc $-1 < \lambda < 1$. Ainsi $\lambda^p \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow +\infty$.
En prenant la limite coefficient par coefficient dans la matrice A^p obtenue à la question 4,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} A^p = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = L(\alpha, \beta)$$

Si $\alpha = \beta = 1$ alors $\lambda = -1$ et les suites coordonnées ne convergent pas. On a $A(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A(1, 1)^2 = I_2$. Ainsi $A(1, 1)^{2p} = I_2$ et $A(1, 1)^{2p+1} = A(1, 1)$. On a deux extraites qui convergent vers des limites différentes.

1.2 Applications

- 6) Le système complet d'événements $((X_n = 0), (X_n = 1))$ donne

$$(X_{n+1} = i) = [(X_{n+1} = i) \cap (X_n = 0)] \cup [(X_{n+1} = i) \cap (X_n = 1)]$$

La formule des probabilités totales s'écrit donc

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = i)\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = i)\mathbb{P}(X_n = 1)$$

Or, $\mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) = \alpha$ (passage de 0 à 1) et $\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = \beta$ (passage de 1 à 0) puis $\mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = 1 - \alpha$ (pas d'erreur sur 0) et $\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = 1 - \beta$ (pas d'erreur sur 1). Ceci se traduit matriciellement par

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \beta \\ \alpha & 1 - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix} = A(\alpha, \beta)^T \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}$$

On en déduit par récurrence que

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix} = (A(\alpha, \beta))^n \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_0 = 0) \\ \mathbb{P}(X_0 = 1) \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = 0) &= \frac{\beta + \alpha\lambda^n}{\alpha + \beta} \mathbb{P}(X_0 = 0) + \frac{\beta(1 - \lambda^n)}{\alpha + \beta} \mathbb{P}(X_0 = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) &= \frac{\alpha(1 - \lambda^n)}{\alpha + \beta} \mathbb{P}(X_0 = 0) + \frac{\alpha + \beta\lambda^n}{\alpha + \beta} \mathbb{P}(X_0 = 1) \end{aligned}$$

La formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $((X_0 = 0), (X_0 = 1))$ s'écrit

$$\forall i \in \{0, 1\} \quad \mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{P}_{X_0=0}(X_n = i)\mathbb{P}(X_0 = 0) + \mathbb{P}_{X_0=1}(X_n = i)\mathbb{P}(X_0 = 1)$$

Par conséquent, pour $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_0 = 0) \\ \mathbb{P}(X_0 = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, il vient

$$\boxed{\forall n \geq 0 \quad \mathbb{P}_{X_0=0}(X_n = 0) = \frac{\beta + \alpha\lambda^n}{\alpha + \beta} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{X_0=1}(X_n = 1) = \frac{\alpha + \beta\lambda^n}{\alpha + \beta}}$$

La probabilité que X_n soit conforme à X_0 est alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = 0 \cap X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1 \cap X_0 = 1) &= \mathbb{P}_{X_0=0}(X_n = 0)\mathbb{P}(X_0 = 0) + \mathbb{P}_{X_0=1}(X_n = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) \\ &= \frac{\beta + \alpha\lambda^n}{\alpha + \beta} \mathbb{P}(X_0 = 0) + \frac{\alpha + \beta\lambda^n}{\alpha + \beta} \mathbb{P}(X_0 = 1) \\ &= \varphi\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right) \mathbb{P}(X_0 = 0) + \varphi\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) \mathbb{P}(X_0 = 1) \end{aligned}$$

où $\varphi(x) = x + (1 - x)\lambda^n$. $\varphi'(x) = 1 - \lambda^n \geq 0$ (car $|\lambda| \leq 1$) et φ est donc croissante. Elle est supérieure à son minimum $\varphi(r)$ et on a donc

$$\mathbb{P}(X_n = 0 \cap X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1 \cap X_0 = 1) \geq \varphi(r)(\mathbb{P}(X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_0 = 1)) = \varphi(r)$$

c'est à dire

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 0 \cap X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1 \cap X_0 = 1) \geq r + (1 - r)(1 - \alpha - \beta)^n}$$

- 7) Les erreurs sur les bits se produisant de manière indépendante, la probabilité de conformité de X_n à X_0 est le produit de celle de chaque X_n^k à X_n^0 qui est plus grande que $r + (1 - r)(1 - \alpha - \beta)^n$. Les quantités étant positives, on peut multiplier les inégalités et la probabilité de conformité Q_n vérifie

$$Q_n \geq (r + (1 - r)(1 - \alpha - \beta)^n)^\ell$$

- 8) Dans le cas $\alpha = \beta$, on a $r = 1/2$. Si l'on reprend la question 6, on voit que l'on a une égalité dans les inégalités. Ainsi

$$Q_n = \left(\frac{1 + (1 - 2\alpha)^n}{2}\right)^\ell$$

On se donne $\varepsilon \in]0, 1[$ (plus contraignant que dans l'énoncé mais moralement, on veut des ε petits) et on cherche n tel que $Q_n \leq 1 - \varepsilon$ c'est à dire

$$\left(\frac{1 + (1 - 2\alpha)^n}{2}\right)^\ell \leq 1 - \varepsilon$$

Il suffit donc que $(1 - \varepsilon) > 0$ et on peut élever à la puissance $1/\ell$

$$(1 - 2\alpha)^n \leq 2(1 - \varepsilon)^{\frac{1}{\ell}} - 1$$

L'élevation à la puissance n -ième n'est a priori croissante que sur \mathbb{R}^+ . On remarque donc qu'il suffit que

$$|1 - 2\alpha|^n \leq 2(1 - \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} - 1$$

c'est à dire, en supposant $\alpha \neq 1/2$ et ε assez petit pour que le membre de droite soit > 0 (même remarque)

$$n \ln(|1 - 2\alpha|) \leq \ln(2(1 - \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} - 1)$$

Quand $\alpha \in]0, 1[\setminus \{1/2\}$, $\ln(|1 - 2\alpha|) < 0$ et il suffit que

$$n \geq \frac{\ln(2(1 - \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} - 1)}{\ln(|1 - 2\alpha|)}$$

Pour $\alpha = 1/2$, la condition est vraie pour tout n pourvu que ε soit assez petit.

Pour $\alpha = 1$, la condition est vraie pour tout n pourvu que ε soit assez petit.

2 Spectre des matrices stochastiques

2.1 Coefficients

9) Matrices stochastiques : La définition s'écrit

$$\forall i, j \quad a_{ij} \geq 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{11} + a_{12} = 1 \\ a_{21} + a_{22} = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $a_{11} = 1 - a_{12} \leq 1$ car $a_{12} \geq 0$, et de même pour les autres coefficients. Conclusion

$$\boxed{\forall i, j \quad 0 \leq a_{ij} \leq 1}$$

Matrices strictement stochastiques : De même, $a_{11} = 1 - a_{12}$, mais $a_{12} > 0$, donc $a_{11} < 1$. Ainsi,

$$\boxed{\forall i, j \quad 0 < a_{ij} < 1}$$

10) Si A est stochastique, les coefficients d'une ligne sont positifs et de somme 1. Ils sont donc tous plus petits que 1 et finalement tous dans $[0, 1]$.

Si A est strictement stochastique, elle est stochastique à coefficients non nuls et ses coefficients sont donc tous dans $]0, 1[$. Si, par l'absurde, on avait $a_{i,j} = 1$, comme il y a au moins deux coefficients sur la ligne i et qu'ils sont > 0 , la somme sur la ligne i serait > 1 ce qui est contradictoire avec le caractère stochastique. Ainsi, les coefficients sont tous dans $]0, 1[$.

11) Soit A une matrice à coefficients positifs. Elle est donc stochastique ssi $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ pour tout i . Or,

$$\forall i, (Ae)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} e_j = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$$

et la condition devient $Ae = e$ c'est à dire que e est propre pour A associé à 1.

Vous pouvez faire un sens, puis l'autre, par double implication : c'est vivement conseillé et plus prudent.

12) Soient A, B deux matrices de taille n et $C = AB$. On a

$$\forall i, j, c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

Si A et B sont à coefficients positifs, il en est de même pour C .

Si A et B sont à coefficients strictement positifs, il en est de même pour C .

Enfin, d'après la question 11, $Ae = e$ et $Be = e$. Donc $Ce = ABe = Ae = e$. Toujours d'après la question 11, C est donc stochastique. Il en est de même pour strictement stochastique.

On a donc prouvé que les caractères stochastique et strictement stochastique sont conservés par produit.

2.2 Valeurs propres

13) Soit A une matrice stochastique et $x \in \mathbb{C}^n$. Pour tout i on a

$$|(Ax)_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \|x\|_\infty$$

et on en déduit (en passant à la borne supérieure) que

$$\|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

Comme A^p est aussi stochastique (question 12) on a aussi

$$\forall p \in \mathbb{N}, \|A^p x\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

14) Soit λ une valeur propre complexe de A et x un vecteur propre associé. On a $Ax = \lambda x$ et, avec la question précédente

$$|\lambda| \|x\|_\infty = \|\lambda x\|_\infty = \|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

Comme $\|x\|_\infty > 0$ (x est vecteur propre et donc non nul) on en déduit que $|\lambda| \leq 1$. Ceci étant vrai pour toute valeur propre, $\rho(A) \leq 1$. De plus, 1 est une valeur propre de A (car A est stochastique) et cette inégalité est une égalité (on a un maximum) :

$$\rho(A) = 1$$

2.3 Diagonale strictement dominante

15) Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i|$ soit maximal (un nombre fini non nul de réels admet un maximum). On a alors $|x_i| > 0$ (car x , vecteur propre, est non nul) et comme $(Ax)_i = \lambda x_i$, on a

$$(\lambda - a_{i,i})x_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j$$

Par inégalité triangulaire (les $a_{k,j}$ sont positifs), on en déduit que

$$|\lambda - a_{i,i}| \cdot |x_i| \leq \sum_{j \neq i} a_{i,j} |x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i} a_{i,j}$$

Comme $|x_i| > 0$ on peut conclure que

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} a_{i,j}$$

16) Si, par l'absurde, A n'était pas inversible, on aurait (avec la question précédente)

$$a_{i,i} = |a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} a_{i,j}$$

ce qui contredit le caractère strictement dominant de la diagonale. Ainsi, toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

2.4 Valeur propre de module maximal

17) Posons $B = A_1 - I_{n-1}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on a

$$|b_{i,i}| = |a_{i,i} - 1| = 1 - a_{i,i} = \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j} = \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n-1}} b_{i,j} + a_{i,n} < \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n-1}} b_{i,j}$$

B est donc à diagonale dominante. On en déduit que B est inversible. Ses $n-1$ lignes sont donc indépendantes et c'est a fortiori vrai de celle de $A - I_n$. On a donc

$$\text{rg}(n) \geq n - 1$$

- 18) $\text{Ker}(A - I_n)$ est ainsi (théorème du rang) au plus de dimension 1. Comme il est non réduit à $\{0\}$ (1 est valeur propre d'une matrice stochastique) c'est que

$$\dim(\text{Ker}(A - I_n)) = 1$$

- 19) Soit λ une valeur propre de A . Avec la question 15 et l'inégalité triangulaire, on a (pour une bonne valeur de i)

$$|\lambda| - a_{i,i} = |\lambda| - |a_{i,i}| \leq |\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} a_{i,j}$$

Si $|\lambda| = 1$, cette inégalité est une égalité. On doit donc avoir égalité dans toutes les étapes et en particulier $|\lambda - a_{i,i}| + a_{i,i} = |\lambda|$ et donc (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire) $\lambda - a_{i,i}$ et $a_{i,i}$ ont même argument. Comme $a_{i,i}$ est un réel > 0 , ceci impose que $\lambda - a_{i,i}$ soit un réel > 0 et donc que λ soit un réel > 0 . Comme $|\lambda| = 1$, ceci donne $\lambda = 1$. 1 est donc l'unique valeur propre de module 1 et

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{1\}, |\lambda| < 1$$

3 Probabilité invariante

3.1 Une suite de variables aléatoires

- 20) Par formule des probabilités totales avec le système complet $((X_0 = i))_{1 \leq i \leq 4}$, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = j) = \sum_{i=1}^4 \mathbb{P}_{X_0=i}(X_1 = j) \mathbb{P}(X_0 = i)$$

$\mathbb{P}_{X_0=i}(X_1 = j)$ vaut $1/10$ si $i = j$ et $3/10$ sinon. On a donc

$$P_1 = QP_0 \quad \text{avec} \quad Q = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Une récurrence donne alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = Q^n P_0$$

- 21) Si Π convient, c'est un vecteur propre pour Q associé à la valeur propre 1. Comme Q est strictement stochastique, la partie précédente montre que le sous-espace propre est de dimension 1 et même engendré par $(1, 1, 1, 1)$. La condition sur la somme des coordonnées de Π impose

$$\Pi = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \forall i, p_i = \frac{1}{4}$$

Réciproquement, ce vecteur convient.

3.2 Rapidité de convergence

- 22) Q est symétrique réelle donc diagonalisable (et par le biais d'une matrice orthogonale).
- 23) On sait déjà que 1 est valeur propre de sous espace propre associé $\text{Vect}(\Pi)$. De plus $Q + \frac{2}{10}I_4$ est clairement de rang 1 et $-2/10$ est donc valeur propre de sous-espace propre associé de dimension 3 (théorème du rang). La somme des dimensions des sous-espaces propres valant 4 (Q est diagonalisable), il n'y a pas d'autre valeur propre. De plus, Q étant symétrique réelle, les sous-espaces propres sont supplémentaires orthogonaux. Ainsi

$$\text{Sp}(Q) = \{1, -2/10\}$$

$$E_1(Q) = \text{Vect}(\Pi), \quad E_{-2/10}(Q) = \text{Vect}(\Pi)^\perp = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

24) Notons P la matrice dont la première colonne est $\frac{\Pi}{\|\Pi\|} = 2\Pi$ et les suivantes une base orthonormée de $\text{Vect}(\Pi)^\perp$. P est alors une matrice orthogonale qui diagonalise Q et

$$P^{-1}QP = \text{diag}(1, -2/10, -2/10, -2/10)$$

On en déduit que

$$Q^p = P \text{diag}(1, (-2/10)^p, (-2/10)^p, (-2/10)^p) P^{-1}$$

Quand $p \rightarrow +\infty$, $\text{diag}(1, (-2/10)^p, (-2/10)^p, (-2/10)^p) \rightarrow \text{diag}(1, 0, 0, 0)$ et $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue (linéaire en dimension finie par exemple). Ainsi,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} Q^p = P \text{diag}(1, 0, 0, 0) P^{-1} = R$$

La première colonne de P est 2Π et on a donc

$$P \text{diag}(1, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En multipliant par $P^{-1} = P^T$, seule la première ligne de P^{-1} sert et elle vaut $(2p_1, 2p_2, 2p_3, 2p_4)$. On en déduit que

$$R = 4 \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_3 & p_1p_4 \\ p_2p_1 & p_2^2 & p_2p_3 & p_2p_4 \\ p_3p_1 & p_3p_2 & p_3^2 & p_3p_4 \\ p_4p_1 & p_4p_2 & p_4p_3 & p_4^2 \end{pmatrix} = 4\Pi\Pi^T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour la suite, l'énoncé ne précise aucune norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et il est difficile de savoir à quoi correspond $\|\cdot\|$. Bien sûr, on est en dimension finie et toutes les normes sont "équivalentes" (vocabulaire hors programme en PSI) ce qui rend le choix indifférent. On a

$$Q^p - R = P \text{diag}(0, (-2/10)^p, (-2/10)^p, (-2/10)^p) P^{-1} = \left(-\frac{2}{10}\right)^p P \text{diag}(0, 1, 1, 1) P^{-1}$$

On en déduit que

$$\|Q^p - R\| = \left(\frac{2}{10}\right)^p \|P \text{diag}(0, 1, 1, 1) P^{-1}\| = O\left(\frac{2}{10}\right)^p$$

puisque $\|P \text{diag}(0, 1, 1, 1) P^{-1}\|$ est indépendant de p .

Comme on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = Q^n P_0$$

et comme $M \mapsto MP_0$ est continue, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = RP_0 = 4\Pi\Pi^T P_0$$

Or, $\Pi^T P_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(X_0 = i) = \frac{1}{4}$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \Pi$$

Quand n tend vers $+\infty$ on a autant de chance de se retrouver sur chaque point et cela quelle que soit la position initiale.

4 Puissances d'une matrice stochastique

25) Soit $j \in \{1, \dots, n\}$;

$$\forall k \in [1, n], a_{k,j}^{(p+1)} = \sum_{i=1}^n a_{k,i} a_{i,j}^{(p)} \leq \sum_{i=1}^n a_{k,i} M_j^{(p)} = M_j^{(p)}$$

En passant au maximum sur k , on en déduit que

$$M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}$$

De même

$$\forall k \in [1, n], a_{k,j}^{(p+1)} = \sum_{i=1}^n a_{k,i} a_{i,j}^{(p)} \geq \sum_{i=1}^n a_{k,i} m_j^{(p)} = m_j^{(p)}$$

En passant au maximum sur k , on en déduit que

$$m_j^{(p+1)} \geq m_j^{(p)}$$

$m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)}$ est immédiat (minimum plus petit que maximum). Comme M et toutes ses puissances sont tritement stochastiques, tous les coefficients sont > 0 et $m_j^{(p)} > 0$. Finalement

$$0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}$$

26) On note k un indice tel que $a_{k,j}^{(p+1)} = m_j^{(p+1)}$. On a alors

$$\begin{aligned} m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} &= a_{k,j}^{(p+1)} - m_j^{(p)} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{k,i} a_{i,j}^{(p)} - \sum_{i=1}^n a_{k,i} m_j^{(p)} \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{a_{k,i}}_{\geq m} \underbrace{(a_{i,j}^{(p)} - m_j^{(p)})}_{\geq 0} \\ &\geq m \sum_{i=1}^n (a_{i,j}^{(p)} - m_j^{(p)}) \end{aligned}$$

Dans la dernière somme, tous les termes sont ≥ 0 et l'un vaut $M_j^{(p)} - m_j^{(p)}$ et donc

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$

De même, On note ℓ un indice tel que $a_{\ell,j}^{(p+1)} = M_j^{(p+1)}$. On a alors

$$\begin{aligned} M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} &= M_j^{(p)} - a_{\ell,j}^{(p+1)} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{\ell,i} M_j^{(p)} - \sum_{i=1}^n a_{\ell,i} a_{i,j}^{(p)} \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{a_{\ell,i}}_{\geq m} \underbrace{(M_j^{(p)} - a_{i,j}^{(p)})}_{\geq 0} \\ &\geq m \sum_{i=1}^n (M_j^{(p)} - a_{i,j}^{(p)}) \end{aligned}$$

Dans la dernière somme, tous les termes sont ≥ 0 et l'un vaut $M_j^{(p)} - m_j^{(p)}$ et donc

$$M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$

27) On a tout d'abord

$$\begin{aligned} M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} &= M_j^{(p+1)} - M_j^{(p)} \\ &+ M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \\ &+ m_j^{(p)} - m_j^{(p+1)} \end{aligned}$$

Le premier terme est majoré avec la seconde inégalité de la question précédente. Le troisième est majoré grâce à la première inégalité. On obtient

$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1 - 2m)(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$

28) La question 25 montre que $(m_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante alors que $(M_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ décroît. La question précédente donne par récurrence

$$0 \leq M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \leq (1 - 2m)^p (M_j^{(0)} - m_j^{(0)})$$

Comme $n \geq 2$, il y a au moins deux coefficients par ligne. Ils sont > 0 et leur somme vaut 1. Il ne peuvent donc être tous deux $< 1/2$ et l'un est $\geq 1/2$. Ainsi, $m \geq 1/2$. Le seul cas d'égalité est celui où $n = 2$ et où tous les coefficients valent $1/2$.

- Si $n = 2$ et $m = 1/2$ alors $A = A(1/2, 1/2)$. La partie I montre que (A^p) est constante et les suites $(m_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(M_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ le sont aussi (égales à $1/2$). Elles sont donc adjacentes.
- Sinon $m < 1/2$ et $(1 - 2m)^p \rightarrow 0$. On a donc $M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \rightarrow 0$. Les suites sont encore adjacentes.

29) En notant l_j la limite commune à $(M_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(m_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$, comme $m_j^{(p)} \leq a_{k,j}^{(p)} \leq M_j^{(p)}$ pour tout k , tous les coefficients de la colonne k dans la suite (A^p) tendent vers l_j . (A^p) converge donc vers la matrice L dont toutes les lignes valent (l_1, \dots, l_n) . Comme A^p est stochastique pour tout p , L l'est aussi (passage à la limite dans une suite constante égale à 1).

FIN DE L'ÉPREUVE