

## Épreuve de Mathématiques 9

---

Durée 4 h

---

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

**Les calculatrices sont interdites**

### Exercice 1

#### Notations et définitions

- $\mathbb{K}$  désigne l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .
- $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  est l'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $m$  colonnes et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$  est plus simplement noté  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- Un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  peut être considéré comme élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
- On identifie un élément de  $x \in \mathbb{K}^n$  à une matrice colonne et si  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , on note  $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$ .
- Une suite  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  est dite convergente si toutes les suites coordonnées  $(M_p(i, j))_{p \in \mathbb{N}}$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ ) convergent. La limite est alors l'élément de  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  dont les coefficients sont les limites des suites coordonnées.
- Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on note  $\text{Sp}(A)$  l'ensemble des valeurs propres complexes de  $A$  et on note

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$$

Cette quantité s'appelle le rayon spectral de  $A$ .

- Si  $X$  est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  telle que  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ , on identifie la loi  $P_X$  de  $X$  au vecteur colonne 
$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = x_1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X = x_n) \end{pmatrix}.$$

### Objectifs

L'objet de ce problème est d'étudier la suite des puissances d'une matrice stochastique. La première partie est consacrée à cette étude dans le cas où  $n = 2$ . Dans la seconde partie, on étudie le spectre des matrices stochastiques. Dans la troisième partie, on étudie l'existence d'une probabilité invariante par une matrice stochastique et la dernière partie est consacrée à l'étude des puissances d'une telle matrice.

## 1 Cas $n = 2$

On suppose dans cette partie que  $n = 2$  et, pour  $\alpha \in [0, 1]$  et  $\beta \in [0, 1]$  avec  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ , on note :

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

Il pourra être utile de noter  $\lambda = 1 - (\alpha + \beta)$ .

### 1.1 Puissances de $A(\alpha, \beta)$

- 1) Montrer que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est vecteur propre de  $A(\alpha, \beta)$  pour une valeur propre que l'on déterminera.
- 2) Déterminer à l'aide de la trace l'autre valeur propre de  $A(\alpha, \beta)$ .
- 3) Montrer que  $A(\alpha, \beta)$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et la diagonaliser.
- 4) Calculer, pour tout entier  $p \in \mathbb{N}$ , la matrice  $A(\alpha, \beta)^p$ .
- 5) Montrer que, pour  $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$ , la suite  $(A(\alpha, \beta)^p)_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice  $L(\alpha, \beta)$  que l'on précisera. Que se passe-t-il pour  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$  ?

### 1.2 Applications

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels de  $]0, 1[$ . Un message binaire de longueur  $\ell$ , c'est à dire une suite finie  $(a_1, a_2, \dots, a_\ell)$  où pour tout  $i \in \{1, \dots, \ell\}$   $a_i \in \{0, 1\}$ , est transmis dans un réseau formé de relais. On suppose que, à chaque relais, un élément  $x \in \{0, 1\}$  est transmis avec une probabilité d'erreur égale à  $\alpha$  pour un passage de 0 à 1 et  $\beta$  pour un passage de 1 à 0. On note  $X_0$  la variable aléatoire définissant le message initial de longueur  $\ell$  et, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , au  $n$ -ième relais, le résultat du transfert est noté  $X_n$ . On suppose que les relais sont indépendants les uns des autres et que les erreurs sur les bits constituant le message sont indépendantes.

#### 6) Cas $\ell = 1$

Montrer que pour tout entier  $n \geq 0$  :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \beta \\ \alpha & 1 - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}$$

calculer, pour  $n > 0$ ,  $\mathbb{P}(X_n = 0 | X_0 = 0)$  et  $\mathbb{P}(X_n = 1 | X_0 = 1)$ .

Si  $r = \min\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)$ , montrer que la probabilité pour que  $X_n$  soit conforme à  $X_0$  est supérieure ou égale à

$$r + (1 - r)(1 - \alpha - \beta)^n$$

#### 7) Cas $\ell \geq 1$

On pose  $X_n = (X_n^1, \dots, X_n^\ell)$  où, pour  $k \in \{1, \dots, \ell\}$ ,  $X_n^k$  est le résultat de la transmission du  $k$ -ième bit au  $n$ -ième relais. Soit  $Q_n$  la probabilité pour que le message  $X_n$  soit conforme au message initial. Montrer que  $Q_n$  vérifie :

$$Q_n \geq (r + (1 - r)(1 - \alpha - \beta)^n)^\ell$$

- 8) On suppose dans cette question que  $\alpha = \beta$ . Que peut-on dire dans ce cas de l'inégalité précédente ? Pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , déterminer un entier  $n_c$  tel que la probabilité d'obtenir un message erroné au  $n$ -ième relais pour  $n \geq n_c$  soit supérieure ou égale à  $\varepsilon$  (on dit que  $n_c$  est la taille critique du réseau).

## 2 Spectre des matrices stochastiques

Dans cette partie, les matrices considérées sont carrées d'ordre  $n \geq 2$ . On dit qu'une matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est stochastique (respectivement strictement stochastique) si et seulement si elle est à coefficients positifs (respectivement strictement positifs) et

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$$

## 2.1 Coefficients

- 9) Dans cette question uniquement, on suppose  $n = 2$ . Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  une matrice stochastique (respectivement strictement stochastique). Montrer que pour tous  $i, j$  compris entre 1 et 2 on a

$$0 \leq a_{i,j} \leq 1 \quad (\text{respectivement } 0 < a_{i,j} < 1)$$

- 10) Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice stochastique (respectivement strictement stochastique). Montrer que pour tous  $i, j$  compris entre 1 et  $n$  on a

$$0 \leq a_{i,j} \leq 1 \quad (\text{respectivement } 0 < a_{i,j} < 1)$$

- 11) Montrer qu'une matrice  $A$  à coefficients réels positifs est stochastique si et seulement si 1 est valeur propre de  $A$  et le vecteur  $e$  de coordonnées  $(1, \dots, 1)$  est un vecteur propre associé.
- 12) À l'aide de la question précédente, montrer que le produit de deux matrices stochastiques (respectivement strictement stochastiques) est une matrice stochastique (respectivement strictement stochastique).

## 2.2 Valeurs propres

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice stochastique.

- 13) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall p \in \mathbb{N}, \|A^p x\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

- 14) Montrer que  $\rho(A) = 1$ .

## 2.3 Diagonale strictement dominante

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est dite à diagonale strictement dominante si et seulement si

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$$

- 15) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  quelconque et soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $A$ . Montrer qu'il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$$

- 16) Montrer qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à diagonale strictement dominante est inversible.

## 2.4 Valeur propre de module maximal

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice strictement stochastique.

- 17) On désigne par  $A_1 = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$  la matrice extraite de  $A$  en supprimant sa dernière ligne et sa dernière colonne. Montrer que la matrice  $A_1 - I_{n-1}$  est à diagonale strictement dominante. Que peut-on en déduire quant au rang de  $A - I_n$  ?
- 18) Montrer que  $\text{Ker}(A - I_n)$  est de dimension 1.
- 19) Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{1\}$ . Montrer que  $|\lambda| < 1$ .

## 3 Probabilité invariante

On considère quatre points dans le plan numérotés de 1 à 4. Une particule se déplace chaque seconde sur l'ensemble de ces points de la façon suivante : si elle se trouve au point  $i$ , elle y reste avec une probabilité égale à  $1/10$  ou passe en un point  $j \neq i$  de façon équiprobable.

### 3.1 Une suite de variables aléatoires

On note  $X_0$  une variable aléatoire de loi  $P_0$  donnant la position  $X_0$  en l'instant  $n = 0$ ,  $X_n$  la position du point à l'instant  $n$  et  $P_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = 4) \end{pmatrix}$  la loi de  $X_n$ .

20) Montrer qu'il existe une matrice  $Q$ , que l'on déterminera, telle que

$$P_1 = QP_0$$

calculer  $P_n$  en fonction de  $Q$  et  $P_0$ .

21) Montrer qu'il existe un unique vecteur  $\Pi = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$ , que l'on déterminera, tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, 4\}, p_i \geq 0, \sum_{i=1}^4 p_i = 1, \Pi = Q\Pi$$

### 3.2 Rapidité de convergence

22) Montrer sans calcul que  $Q$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

23) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $Q$ .

24) En déduire que  $(Q^p)_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice  $R$  que l'on précisera en fonction de  $\Pi$  et qu'il existe  $r \in ]0, 1[$  tel que

$$\|Q^p - R\| = O(r^p)$$

où  $\|\cdot\|$  est une norme quelconque sur  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .

En déduire que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite indépendante de la loi de  $X_0$  et interpréter le résultat obtenu.

## 4 Puissances d'une matrice stochastique

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice strictement stochastique. On note

$$m = \min_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$$

Pour tout entier naturel non nul  $p$ , on note  $a_{i,j}^{(p)}$  le coefficient d'indice  $(i,j)$  de  $A^p$  :

$$A^p = (a_{i,j}^{(p)})_{1 \leq i,j \leq p}$$

Enfin, pour tout entier  $j$  compris entre 1 et  $n$ , on note

$$m_j^{(p)} = \min_{1 \leq k \leq n} a_{k,j}^{(p)}, M_j^{(p)} = \max_{1 \leq k \leq n} a_{k,j}^{(p)}$$

#### 25) Encadrement

Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $p$  et tout entier  $j$  compris entre 1 et  $n$ , on a :

$$0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}$$

#### 26) Minoration

Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $p$  et tout entier  $j$  compris entre 1 et  $n$ , on a :

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}) \quad \text{et} \quad M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$

**27) Majoration**

Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $p$  et tout entier  $j$  compris entre 1 et  $n$ , on a :

$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1 - 2m)(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$

**28) Convergence de ces suites**

En déduire que, pour tout  $j$  entre 1 et  $n$ , les suites  $(m_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(M_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes.

**29) Conclusion**

En déduire que la suite  $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice  $L$  stochastique dont toutes les lignes sont identiques.

**FIN DE L'ÉPREUVE**