Épreuve de Mathématiques 9

Correction

4

Exercice 1 (G2E 2017)

Partie 1 (Premier exemple dans $\mathbb{R}^2$)

1) Équation caractéristique :

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$$

Comme $\Delta = 0$, il y a une racine double $r = \dfrac{1}{3}$. Ainsi les fonctions solutions de l'équation différentielle sont les

$$\boxed{t \mapsto (C_1 t + C_2)e^{\frac{t}{3}}}$$

Cours de PCSI, sert souvent en physique : une question « bateau ».

2) **a)** La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions $\mathscr{C}^\infty$.
Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)e^{\frac{t}{3}} \quad \text{avec} \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie par définition de φ : $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)e^{\frac{t}{3}}$$

En dérivant,

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(n+1)}(t) &= \Big(a_n + \frac{1}{3}(a_n t + b_n)\Big)e^{\frac{t}{3}} \\ &= \Big(\frac{a_n}{3}t + a_n + \frac{b_n}{3}\Big)e^{\frac{t}{3}} \\ &= (a_{n+1}t + b_{n+1})e^{\frac{t}{3}} \end{aligned}$$

Donc, avec $\begin{cases} a_{n+1} = a_n/3 \\ b_{n+1} = a_n + b_n/3 \end{cases}$, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)e^{\frac{t}{3}}}$

On teste pour n petit, on écrit proprement la récurrence. Il n'y a pas besoin d'avoir d'idée : juste de la méthode.

b) Deux façon : on remarque que $\varphi^{(n)}$ est solution de l'équation différentielle, on injecte dedans, on divise par $e^{t/3} \neq 0$, puis on utilise « un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls », ce qui nous donne les égalités voulues.
Ou bien on utilise les relations ci-dessus : D'après a),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} a_{n+1} = a_n/3 \\ b_{n+1} = a_n + b_n/3 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} - \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{9}a_n = \frac{a_n}{9} - \frac{2}{9}a_n + \frac{1}{9}a_n = 0$$

et

$$\begin{aligned} b_{n+2} - \frac{2}{3}b_{n+1} + \frac{1}{9}b_n &= a_{n+1} + \frac{1}{3}b_{n+1} - \frac{2}{3}(a_n + \frac{1}{3}b_n) + \frac{1}{9}b_n \\ &= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{9}b_n - \frac{2}{3}a_n - \frac{2}{9}b_n + \frac{1}{9}b_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

Idée : pour montrer $A = B$, on montre $A - B = 0$, et pour obtenir 0, on passe tout au rang n.

Ainsi, (a_n) et (b_n) satisfont à la même relation de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} - \frac{1}{9}a_n, \quad b_{n+2} = \frac{2}{3}b_{n+1} - \frac{1}{9}b_n}$$

c) Suites récurrentes linaires d'ordre 2. L'équation caractéristique est la même que pour l'équation différentielle, et a pour racine $r = \frac{1}{3}$. Donc les solutions sont de la forme

$$\left((C_1 + C_2 n)\frac{1}{3^n}\right)_n$$

Or $a_0 = C_1 = a$ et $a_1 = \dfrac{a + C_2}{3} = \dfrac{a}{3}$, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{a}{3^n}}$$

De même, $b_0 = C_1 = b$ et $b_1 = \dfrac{b + C_2}{3} = \dfrac{3a + b}{3}$, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = (3na + b)\frac{1}{3^n}}$$

Cours de PCSI, revu en PC, ressemble aux équations différentielles : une autre question « bateau ».

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\begin{cases} a_{n+1} = & & a_{n+1} \\ a_{n+2} = -\frac{1}{9}a_n & + & \frac{2}{3}a_{n+1} \end{cases}$ Donc $X_{n+1} = \frac{1}{9}AX_n$ avec

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}}$$

C'est une question de cours : passer de l'ordre p scalaire à l'ordre 1 vectoriel, avec la matrice compagnon.

b) $\chi_f(x) = \det(xI_2 - A) = (x-3)^2$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(f) = \{3\} \subset \mathbb{R}_+}$$

c) $f(-2, 1) = -18 + 8 < 0$ donc $\exists x \in \mathbb{R}^2$, $\langle f(x), x\rangle < 0$. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ ne vérifie pas } (P)}$$

Partie 2 (Une projection orthogonale dans $\mathbb{R}^3$)

1) a) *Résolution de système 3×3 : à savoir faire, impérativement.*

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } f \iff AX = 0$$

$$\iff \begin{cases} x+y-z=0 & L_1 \longleftarrow 1/2L_1 \\ 2x+5y+z=0 \\ -2x+y+5z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ 3y+3z=0 & L_2 \longleftarrow L_2-2L_1 \\ 3y+3z=0 & L_3 \longleftarrow L_3+2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-y+z=2z \\ y=-z \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Ker } f = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^3$. $f(x)-x \in \text{Ker } f \iff f(f(x)-x)=0$. Or

$$A^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 12 & 12 & -12 \\ 12 & 30 & 6 \\ -12 & 6 & 30 \end{pmatrix} = A$$

Donc $f^2(x)=f(x)$, ce qui entraîne $f(f(x)-x)=f^2(x)-f(x)=0$. Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x)-x \in \text{Ker } f}$$

De plus, f est un projecteur.

b) D'après 1)a), $\dim \text{Ker } f = 1$. Donc d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f = 2$$

Or $\text{Im } f$ est engendrée par les vecteurs colonnes de A. Il suffit donc d'en prendre deux non colinéaires, par exemple

$$\boxed{\text{Im } f = \text{Vect}\,(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix})}$$

c) D'après 1)a), $f^2=f$ donc f est une projection sur $\text{Im } f$ parallèlement à $\text{Ker } f$. De plus,

$$\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle = 4-2-2=0 \quad \text{et} \quad \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 4-5+1=0$$

Donc $\text{Ker } f \perp \text{Im } f$:

$$\boxed{f \text{ est la projection orthogonale sur Im } f}$$

2) f est un projecteur *(attention, aucune autre hypothèse n'est nécessaire)* donc

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f}$$

3) Soit $x = x_1 + x_2 \in \text{Ker } f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle x_1 + x_2, f(x_1 + x_2)\rangle &= \langle x_1 + x_2, x_2\rangle && \text{Car } x_1 \in \text{Ker } f \text{ et } x_2 \in \text{Im } f.\\
&= \langle x_1, x_2\rangle + \langle x_2, x_2\rangle && \text{Par bilinéarité du produit scalaire.}\\
&= 0 + \|x_2\|^2 \geqslant 0 && \text{Car } x_1 \perp x_2
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ vérifie la propriété } (P)}$$

Partie 3 (Deux exemples dans $\mathbb{R}^n$)

1) a) *f^* a déjà été dans l'année. Technique habituelle : départ, arrivée, traduire les deux, réfléchir après.*

On note X le vecteur colonne associé au vecteur $x \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \langle x, f(x)\rangle &= {}^tX(AX)\\
&= {}^t({}^tXAX)\\
&= {}^t(AX)X\\
&= \langle x, f^*(x)\rangle
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \langle x, f(x)\rangle = \langle x, f^*(x)\rangle}$$

b) $\boxed{\Longrightarrow}$

$$\begin{aligned}
f \text{ vérifie } (P) &\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \langle x, f(x)\rangle \geqslant 0\\
&\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \langle x, f^*(x)\rangle \geqslant 0 \qquad \text{D'après a) :} \langle x, f(x)\rangle = \langle x, f^*(x)\rangle\\
&\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \langle x, f(x)\rangle + \langle x, f^*(x)\rangle = \langle x, (f + f^*)(x)\rangle \geqslant 0\\
&\Longrightarrow (f + f^*) \text{ vérifie } (P)
\end{aligned}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$

$$\begin{aligned}
(f + f^*) \text{ vérifie } (P) &\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \langle x, (f + f^*)(x)\rangle \geqslant 0\\
\text{Or } \langle x, (f + f^*)(x)\rangle &= \langle x, f(x)\rangle + \langle x, f^*(x)\rangle = 2\langle x, f(x)\rangle \text{ d'après a)}\\
&\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \quad 2\langle x, f(x)\rangle \geqslant 0\\
&\Longrightarrow f \text{ vérifie } (P)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ vérifie } (P) \text{ si et seulement si } f + f^* \text{ vérifie } (P)}$$

c) ${}^t(A + {}^tA) = A + {}^tA$ donc $A + {}^tA$ est symétrique réelle. D'après le théorème spectral, $A + {}^tA$ est diagonalisable dans une base orthonormée. C'est-à-dire

$$\boxed{\text{Il existe } Q \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ diagonale telles que : } A + {}^tA = QDQ^{-1}}$$

d) D'après b), f vérifie (P) si et seulement si $f + f^*$ vérifie (P).
De plus, $f + f^*$ est symétrique réelle, donc $\text{Sp}\,(f + f^*) \subset \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ de vecteur colonne X. Soit Q et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, définies au c).

Notons $X' = Q^{-1}X = {}^tQX = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \langle x, (f+f^*)(x)\rangle &= {}^tX(QD{}^tQ)X && \text{D'après c)} \\ &= {}^tX'DX' && \text{Par définition de } X' \text{(changement de base)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {x'_i}^2 \end{aligned}$$

Si $\operatorname{Sp}(f+f^*) \subset \mathbb{R}_+$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$, donc la somme précédente est positive : $f + f^*$ vérifie (P).
Si $\operatorname{Sp}(f+f^*) \not\subset \mathbb{R}_+$, alors il existe i_0 tel que $\lambda_{i_0} < 0$. En choisissant $X = QX'$ tel que $x'_i = 0$ pour $i \neq i_0$, et $x'_{i_0} = 1$, la somme précédente s'écrit

$$\langle x, (f+f^*)(x)\rangle = \lambda_{i_0} < 0$$

Donc $f + f^*$ ne vérifie pas (P).
En conclusion,

$$\boxed{f \text{ vérifie } (P) \text{ si et seulement si } \operatorname{Sp}(f+f^*) \subset \mathbb{R}_+}$$

2) **a)** $A = B + {}^tB$, donc $f = g + g^*$. Ainsi, d'après 1)a),

$$\boxed{f \text{ vérifie } (P) \text{ si et seulement si } g \text{ vérifie } (P)}$$

b) Supposons g diagonalisable. $\chi_g(x) = (x-1)^n$ (matrice triangulaire) donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$B = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$$

Or $B \neq I_n$. C'est donc absurde :

$$\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

c) $A - I_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Toutes les colonnes sont identiques donc colinéaires, et non nulles. Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{rg}(A - I) = 1}$$

Ainsi, d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = n - 1$.
Comme $E_1 = \operatorname{Ker}(A - I_n)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ de A, $\lambda = 1$ est de multiplicité au moins $n - 1$.
Comme A a au plus n valeurs propres (comptées avec multiplicité), en notant $\mu \in \mathbb{C}$ la dernière valeur propre (qui peut être égale à 1 elle aussi), il vient

$$\operatorname{Tr} A = (n-1)\lambda + \mu = n - 1 + \mu = 2n$$

Donc $\mu = n + 1$. Finalement,

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont } 1 \text{ et } n+1}$$

d) Comme $\operatorname{Sp}(g + g^*) = \{1, n+1\} \subset \mathbb{R}_+$, d'après 1)d) g vérifie (P). Or g vérifie (P) si et seulement si $g + g^*$ vérifie (P) d'après 1)b). Ainsi,

$$\boxed{f \text{ vérifie la propriété } (P)}$$

3) Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, $E(X) = \lambda$ et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$. Donc $E(X^2) = \lambda + \lambda^2$.

a) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

- Si $i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes donc $E(X_iX_j) = E(X_i)E(X_j) = 1$.
- Si $i = j$, $E(X_i^2) = 1 + 1 = 2$.

Ainsi $\boxed{A = (E(X_iX_j))_{i,j}}$

b) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si $y = (y_1, \dots, y_n) = f(x)$, alors

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad y_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} E(X_iX_j)x_j && \text{D'après a).} \\
&= E\left(\sum_{j=1}^{n} X_iX_jx_j\right) && \text{Par linéarité de l'espérance.}
\end{aligned}$$

D'où $\langle x, f(x)\rangle = \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} X_iX_jx_j\right)$ toujours par linéarité de l'espérance.
Comme X_i ne dépend pas de j, on peut la sortir de la somme :

$$\begin{aligned}
\langle x, f(x)\rangle &= E\left(\sum_{i=1}^{n} x_iX_i\Big[\sum_{j=1}^{n} X_jx_j\Big]\right) \\
&= E\left(\Big[\sum_{j=1}^{n} X_jx_j\Big]\sum_{i=1}^{n} x_iX_i\right) && \text{Car la somme sur } j \text{ ne dépend pas de } i.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle x, f(x)\rangle = E\left(\Big(\sum_{i=1}^{n} x_iX_i\Big)^2\right)}$$

c) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Comme $\Big(\sum_{i=1}^{n} x_iX_i\Big)^2 \geqslant 0$, par croissance de l'espérance,

$$\langle x, f(x)\rangle = E\left(\Big(\sum_{i=1}^{n} x_iX_i\Big)^2\right) \geqslant 0$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ vérifie } (P)}$

Exercice 2 (CCP PC 2006)

1) Pour $x \in \mathcal{D}$, on a $u_n(x)$ qui existe (car $x \neq -n$) pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Puis, pour un tel x fixé, on a :

- $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$
- $\forall n \geqslant 1,\ \dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$
- $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge (Série de Riemann, avec $2 > 1$)

Donc, par critère d'équivalence de séries à termes positifs, $\sum u_n(x)$ converge. En conclusion,

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum u_n \text{ converge simplement sur } \mathcal{D}}$$

2) a) $x \mapsto (n+x)^2$ est une fonction polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et ne s'annule qu'en $-n$, donc son inverse, u_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-n\}$.
Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_p : \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-n\}, \quad u_n^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p (p+1)!}{(n+x)^{p+2}}$$

est vraie pour tout $p \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie par définition de u_n.
- $\underline{\mathcal{H}_p \Longrightarrow \mathcal{H}_{p+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_p$ vraie : *(les fractions, c'est pénible : écrire $u^{-\alpha}$ plutôt que $\frac{1}{u^\alpha}$)*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-n\}, \quad u_n^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p (p+1)!}{(n+x)^{p+2}} = (-1)^p (p+1)!(n+x)^{-(p+2)}$$

En dérivant, il vient,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-n\}, \quad u_n^{(p+1)}(x) &= \left(u_n^{(p)}\right)'(x) \\ &= (-1)^p (p+1)!\big[-(p+2)(n+x)^{-(p+3)}\big] \\ &= \frac{(-1)^{p+1}(p+2)!}{(n+x)^{p+3}}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall p \geqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-n\}, \quad u_n^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p (p+1)!}{(n+x)^{p+2}}}$

b) Soit $p \geqslant 1$. *Pour ceux qui sont à l'aise avec les majorations, on peut aussi encadrer $u_n^{(p)}(x)$ sur $[a,b]$ sans calculs de dérivée, et conclure.*
$\underline{\text{Calculons } \|u_n^{(p)}\|_\infty \text{ sur } [a,b]}$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

- Cas $p = 2k$.
Pour tout $x \in [a,b]$,

$$(u_n^{(2k)})'(x) = -\frac{(2k+2)!}{(n+x)^{2k+3}} < 0$$

car $n + x > 0$. De plus,

$$u_n^{(2k)}(x) = \frac{(2k+1)!}{(n+x)^{2k+2}} > 0$$

x	a	b
$u_n^{(2k+1)}(x)$	$-$	
$u_n^{(2k)}$	$u_n^{(2k)}(a) \geqslant 0$ ↘	$u_n^{(2k)}(b) \geqslant 0$

Par conséquent $\|u_n^{(2k)}\|_\infty = |u_n^{(2k)}(a)|$

- Cas $p = 2k+1$.
Pour tout $x \in [a,b]$,

$$(u_n^{(2k+1)})'(x) = u_n^{(2k+2)}(x) > 0$$

car $n + x > 0$. De plus,

$$u_n^{(2k+1)}(x) = -\frac{(2k+2)!}{(n+x)^{2k+3}} < 0$$

x	a	b
$u_n^{(2k+2)}(x)$	$+$	
$u_n^{(2k+1)}$	$u_n^{(2k)}(a) \leqslant 0$ ↗	$u_n^{(2k)}(b) \leqslant 0$

Par conséquent $\|u_n^{(2k+1)}\|_\infty = |u_n^{(2k)}(a)|$

En conclusion,

$$\|u_n^{(p)}\|_\infty = |u_n^{(p)}(a)| = \frac{(p+1)!}{(n+x)^{p+2}} \sim \frac{(p+1)!}{n^{p+2}}$$

Or, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(p+1)!}{n^{p+2}}$ converge (Série de Riemann, avec $\alpha = p+2 > 1$). Donc par critère d'équivalence de séries à termes positifs, $\sum \|u_n^{(p)}\|_\infty$ converge. Par conséquent,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n^{(p)} \text{ converge normalement, donc uniformément, sur } [a,b]}$$

c) On applique le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions sur $[a,b] \subset]-1,+\infty[$:

- u_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,b]$;
- La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $[a,b]$;
- Pour tout $p \geqslant 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a,b]$;

Donc

$$\boxed{U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ est } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } [a,b] \text{ et } \forall p \geqslant 1,\ \forall x \in [a,b],\ U^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p (p+1)!}{(n+x)^{p+2}}}$$

Ce résultat étant vrai pour tout $[a,b] \subset]-1,+\infty[$, il est vrai sur $\displaystyle\bigcup_{-1<a<b} [a,b] =]-1,+\infty[$.

3) **a)** *Toujours écrire les sommes avec des pointillés au brouillon.*

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathcal{D} \qquad U(x) &= U_N(x) + R_N(x) = U_N(x) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k(x) \\
&= U_N(x) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \\
&= U_N(x) + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i+N+x)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D} \qquad U(x) = U_N(x) + U(N+x)}$$

b) U est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,0[$ d'après 2)c), donc $x \mapsto U(N+x)$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-N-1,-N[$
Puis, U_N est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-N-1,-N[$ comme somme finie de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$.
Par conséquent, toujours par addition,

$$\boxed{U \text{ est } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-N-1,-N[}$$

Cela étant vrai pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, U est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\displaystyle\bigcup_{N\in\mathbb{N}^*}]-N-1,-N[$ et sur $]-1,+\infty[$ d'après 2)c), donc

$$\boxed{U \text{ est } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathcal{D} =]-1,+\infty[\cup \bigcup_{N\in\mathbb{N}^*}]-N-1,-N[}$$

c) D'après la question 2c, on sait que pour $k \geqslant 1$ et $x > -1$, $U^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (k+1)!}{(n+x)^{k+2}}$.

La formule reste valable pour $k = 0$ (car $U^{(0)} = U$). Donc pour $p \geqslant 2$, si on remplace k par $p-2$, on a

$$U^{(p-2)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-2}(p-1)!}{(n+x)^p} = (-1)^p (p-1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}$$

Donc

$$\boxed{\forall x > -1 \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p} = \frac{(-1)^p}{(p-1)!} U^{(p-2)}(x)}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in]-N-1, -N[$ on réutilise le résultat de la question 3a que l'on dérive $p-2$ fois (c'est une égalité entre fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc on peut le faire) : $U^{(p-2)}(x) = U_N^{(p-2)}(x) + U^{(p-2)}(N+x)$. Comme $N+x > -1$, on peut utiliser la formule précédente pour avoir

$$U^{(p-2)}(N+x) = (-1)^p(p-1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+N+x)^p} \underset{k=n+N}{=} (-1)^p(p-1)! \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^p}$$

Puis, $U_N(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} u_k(x)$, donc $U_N^{(p-2)}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} u_k^{(p-2)}(x) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^p(p-1)! \frac{1}{(k+x)^p}$.

Par conséquent, on retrouve $U^{(p-2)}(x) = (-1)^p(p-1)! \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}$, soit

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p} = \frac{(-1)^p}{(p-1)!} U^{(p-2)}(x)}$$

4) Posons $x = -N + h$. Écrivons $U(x) = U_N(x) + U(N+x)$ (résultat de la question 3a). Ainsi,

$$\begin{aligned} U(-N+h) &= U_N(-N+h) + U(h) && \text{Or } U \text{ est continue sur }]-1,+\infty[\\ &= \frac{1}{(N-N+h)^2} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(\underbrace{k-N}_{\neq 0}+h)^2} + U(0) + o(1) \\ &\sim \frac{1}{h^2} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{U(-N+h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{h^2}}$$

5) a) On sait que U est dérivable sur $]-1,+\infty[$, et que

$$\forall x > -1, \qquad U'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^1(1+1)!}{(n+x)^{1+2}} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3}$$

Comme $n \geqslant 1$ et $x > -1$, on a $n+x > 0$, et donc $(n+x)^3 > 0$, donc $U'(x) < 0$. Donc

$$\boxed{U \text{ est strictement décroissante sur }]-1,+\infty[}$$

Ou bien citer la question 2)b) : cas $k = 0$.

b) *Un cas classique de comparaison série intégrale. Comme dans le DS précédent. Classiquissime.*

Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(t+x)^2}$ est décroissante sur $[0,+\infty[$. Ainsi,

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [n,n+1], && \frac{1}{(n+1+x)^2} \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{(n+x)^2} \\ \Longrightarrow\ &\forall n \in \mathbb{N}, && \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1+x)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+x)^2}\,\mathrm{d}t \\ \Longrightarrow\ &\forall n \in \mathbb{N}, && \frac{1}{(n+1+x)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(n+x)^2} \end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale dont les bornes « sont dans le bon sens. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(n+1+x)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(n+x)^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$$

On peut sommer les inégalités de $n = 1$ à $N \geqslant 1$. Comme $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge d'après 1), et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$ converge (en $+\infty$: Riemann, $\alpha = 2 > 1$ après un équivalent, et en 0, $x > 0$), on passe à la limite $N \to +\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$$

Donc en effectuant le changement de variable $u = t + x$, simple décalage,

$$\boxed{\int_{x+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant U(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}}$$

Or, ces intégrales se calculent : $\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{+\infty} = \frac{1}{x}$ Et de même $\int_{x+1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$.
Donc

$$\frac{1}{x+1} \leq U(x) \leq \frac{1}{x}$$

pour tout $x > 0$. Par conséquent,

$$\frac{x}{x+1} \leq xU(x) \leq 1$$

et le théorème d'encadrement donne $\lim_{x\to+\infty} xU(x) = 1$, et donc

$$\boxed{U(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}}$$

6) Soit $x \in \mathcal{D}$. Alors $\frac{x}{2}$ et $\frac{x-1}{2}$ sont aussi dans $\mathcal{D}$.

Commencer par écrire au brouillon chaque morceau, pour comprendre de quoi on parle. Se débarrasser autant que possible des fractions, comme toujours.

$$U\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n+x)^2} \qquad \text{et} \qquad U\left(\frac{x-1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1+x)^2}$$

D'où

$$\begin{aligned} U\left(\frac{x}{2}\right) + U\left(\frac{x-1}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n+x)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1+x)^2} \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{4}{(k+x)^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{4}{(k+x)^2} \\ &= 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{U(x) = \frac{1}{4}\left[U\left(\frac{x}{2}\right) + U\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]}$$

FIN DE L'ÉPREUVE