

Épreuve de Mathématiques 9

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique (classiquement noté $\langle\ ,\ \rangle$). On rappelle que le spectre d'un endomorphisme (noté Sp) est l'ensemble de ses valeurs propres. Pour tout $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, on cherche à déterminer si f vérifie la propriété (P) ci-dessous :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \langle x, f(x)\rangle \geqslant 0 \qquad (P)$$

La partie 1 fait intervenir une équation différentielle et est consacrée à un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Dans la partie 2, on étudie une projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ et dans la partie 3, on démontre des résultats plus généraux avant de les appliquer à deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Ces trois parties sont indépendantes.

Partie 1 (Premier exemple dans $\mathbb{R}^2$)

1) Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y''(t) - \frac{2}{3}y'(t) + \frac{1}{9}y(t) = 0$$

2) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et φ la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = (at + b)e^{\frac{t}{3}}$$

a) Démontrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)e^{\frac{t}{3}}$$

b) Démontrer que (a_n) et (b_n) satisfont à la même relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} - \frac{1}{9}a_n, \quad b_{n+2} = \frac{2}{3}b_{n+1} - \frac{1}{9}b_n$$

c) Déterminer a_n et b_n en fonction de a, b et n.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la matrice colonne de coefficients a_n et a_{n+1}.

a) Démontrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_{n+1} = \frac{1}{9}AX_n.$$

b) f désignant l'endomorphisme canoniquement associé à A, vérifier que $\mathrm{Sp}\,(f) \subset \mathbb{R}_+$.

c) Calculer $f((-2,1))$ puis déterminer si f vérifie (P).

Partie 2 (Une projection orthogonale dans $\mathbb{R}^3$)

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère la matrice A définie ci-dessous dont on note f l'endomorphisme canoniquement associé :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1) a) Déterminer Ker f puis montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x) - x \in \mathrm{Ker}\ f$$

b) Déterminer Im f.

c) Montrer que f est la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel que l'on précisera.

d) Justifier l'égalité : $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\ f \oplus \mathrm{Im}\ f$

2) Calculer $\langle x, f(x)\rangle$ pour $x \in \mathbb{R}^3$. En déduire que f vérifie la propriété (P).

Partie 3 (Deux exemples dans $\mathbb{R}^n$)

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul. I_n désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A et f^* l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice transposée de A, notée ${}^tA$.

1) a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \langle x, f(x)\rangle = \langle x, f^*(x)\rangle$$

b) En déduire que f vérifie (P) si et seulement si $f + f^*$ vérifie (P).

c) Justifier qu'il existe une matrice inversible $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tQ = Q^{-1}$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A + {}^tA = QDQ^{-1}$$

d) En déduire que f vérifie (P) si et seulement si $\mathrm{Sp}\,(f + f^*) \subset \mathbb{R}_+$.

2) Dorénavant A et B désignent les deux matrices ci-dessous appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Démontrer que f vérifie (P) si et seulement si g, endomorphisme canoniquement associé à B, vérifie (P).

b) Justifier que g n'est pas diagonalisable.

c) Calculer $\mathrm{rg}\,(A - I)$ et en déduire que les valeurs propres de A sont 1 et $n+1$.

d) En déduire que f vérifie la propriété (P).

3) Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre 1.

a) Démontrer que la matrice A définie en 2) est la matrice dont le coefficient en i-ème ligne et j-ème colonne vaut $E(X_iX_j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

b) Démontrer que

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle x, f(x)\rangle = E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i X_i\right)^2\right)$$

c) Retrouver que f vérifie (P).

Exercice 2

On note $\mathcal{D} = \mathbb{R} \backslash (-\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des nombres entiers strictement négatifs. On considère la série de fonctions d'une variable réelle de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq -n, \qquad u_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}.$$

1) Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $\mathcal{D}$.

On notera désormais $U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de cette série de fonctions, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ la somme partielle d'ordre n et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste correspondant. On a donc $R_n = U - U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ donné. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n^{(p)}$ la dérivée de u_n à l'ordre p. Calculer $u_n^{(p)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -n$.

b) Soient a et b deux nombres réels tels que $-1 < a < b$. Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, b]$.

c) Déduire de ce qui précède que U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.

3) a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ donné. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer $U(x)$ à l'aide de $U_N(x)$ et $U(x+N)$.

b) En déduire que U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-N-1, -N[$, puis sur $\mathcal{D}$.

c) Soit $p \in \mathbb{N}$ donné, $p \geqslant 2$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, établir une expression de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}$ à l'aide de p et de $U^{(p-2)}(x)$.

4) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ donné. Donner un équivalent de $U(x)$ lorsque x tend vers $-N$.

5) a) Montrer que U est strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\displaystyle\int_{x+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant U(x) \leqslant \int_{x}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

En déduire un équivalent de $U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $U(x) = \displaystyle\frac{1}{4}\left[U\left(\frac{x}{2}\right) + U\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]$.

FIN DE L'ÉPREUVE