Épreuve de Mathématiques 8

Correction

---4

Exercice 1 (D'après CCP TSI)

Partie 1 (Étude d'une équation différentielle)

1) Soit $x > 0$. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ est continue, donc continue par morceaux, et positive sur $[0, +\infty[$.

Étude en $+\infty$: Par croissance comparée, comme $1/x > 0$,

$$t^2 f(t) \sim t e^{-t/x} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Donc $f(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$).

Donc, par comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Conclusion :

$$\boxed{\varphi(x) \text{ existe pour tout } x > 0}$$

2) Intégrabilité de ψ : Posons

$$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad \psi(t) = \frac{te^{-t/b}}{a^2(1+t)}$$

La fonction ψ est continue sur $[0, +\infty[$.
Étude en $+\infty$: De même qu'au 1, par croissance comparée, comme $1/b > 0$,

$$t^2\psi(t) \sim t^2 e^{-t/b} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Donc $\psi(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$).
Donc, par comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(t)\,\mathrm{d}t$ converge (absolument, car $\psi \geqslant 0$).
Majorations : Soit $t \in [0, +\infty[$. Pour tout $x \in [a, b]$,

$$0 < a \leqslant x \Longrightarrow \frac{t}{x^2} \leqslant \frac{t}{a^2}$$

Et

$$0 < x \leqslant b \Longrightarrow \frac{t}{b} \leqslant \frac{t}{x} \Longrightarrow e^{-\frac{t}{x}} \leqslant e^{-\frac{t}{b}}$$

En conclusion,

$$0 \leqslant \frac{te^{-t/x}}{x^2(1+t)} \leqslant \frac{te^{-t/b}}{a^2(1+t)} = \psi(t)$$

Quand la majoration n'est pas immédiate, il faut justifier (au moins 1 étape intermédiaire), et il vaut mieux déplacer les calculs en « préliminaires ».
Théorème de dérivation : Posons

$$\forall (t, x) \in [0, +\infty[\times[a, b], \qquad h(x, t) = \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$$

Avoir une dérivée partielle juste est fondamental. Prenez votre temps, décomposez, mais la dérivée doit être juste. On dérive par rapport à x. $e^{-\frac{t}{x}} = e^u$, $(e^u)' = u'e^u$. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{t}{x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(tx^{-1}) = -tx^{-2}$. *Etc.*

- $\forall t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, et

$$\forall x \in [a,b], \qquad \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{te^{-t/x}}{x^2(1+t)}$$

- $\forall x \in [a,b]$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (d'après 1)) ;
  la fonction $t \mapsto \dfrac{te^{-t/x}}{x^2(1+t)}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- La fonction $\psi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ définie ci-dessus est **intégrable sur** $[0,+\infty[$ d'après ci-dessus et, toujours d'après les calculs ci-dessus,

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times [0,+\infty[, \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$\boxed{\varphi \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,b] \text{ et } \varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t/x}}{x^2(1+t)}\,\mathrm{d}t.}$$

3) La fonction φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ pour tout a, b tels que $0<a<b$, donc φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\displaystyle\bigcup_{0<a<b} [a,b] =]0,+\infty[$:

$$\boxed{\varphi \text{ est classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$$

On vous donne l'équation différentielle, vous avez y et y' : vérifiez si en remplaçant – tout bêtement – le résultat tombe. Au pire, vous aurez des idées pour une éventuelle intégration par parties.

Pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned} x^2\varphi'(x) + \varphi(x) &= x^2 \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t/x}}{x^2(1+t)}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\frac{t}{x}}}{1+t} + \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{-1/x}\right]_0^{+\infty} \\ &= x \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est solution sur }]0,+\infty[\text{ de l'équation différentielle } (\mathscr{E})}$$

4) **a)** Par dérivation terme à terme à l'intérieur du domaine de convergence, F est $\mathscr{C}^1$ sur $]-R,R[$ et

$$\forall x \in]-R,R[, \qquad F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

En remplaçant dans $(\mathscr{E})$, il vient

$$\begin{aligned} \forall x \in]-R,R[, \qquad x^2F'(x) + F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[(n-1)a_{n-1} + a_n\Big] x^n \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F \text{ solution de } (\mathscr{E}) \text{ sur }]-R,R[\iff \forall x \in]-R,R[, \quad a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[(n-1)a_{n-1} + a_n\Big] x^n = x$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ 0 + a_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 2, \quad (n-1)a_{n-1} + a_n = 0 \end{cases}$$

Par unicité du développement en série entière. Conclusion :

$$\boxed{a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ a_n = -(n-1)a_{n-1}}$$

b) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad a_n = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: est vraie d'après a).
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. $a_{n+1} = -na_n = (-1)^{n+2}n!$ d'après a) $(n+1 \geqslant 2)$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion :

$$\boxed{a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ a_n = (-1)^{n+1}(n-1)!}$$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $u_n = a_n x^n = (-1)^{n+1}(n-1)!x^n$.

$$\forall x \neq 0, \qquad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+2}n!x^{n+1}}{(-1)^{n+1}(n-1)!x^n}\right| = n|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty > 1$$

Donc, d'après d'Alembert, $\sum |u_n|$ diverge grossièrement, donc $\sum u_n$ diverge.

Ainsi, $\boxed{R = 0}$

Vu le coefficient, ce n'est pas étonnant. Cf. l'exercice 1 de la feuille sur les séries entières.

En conclusion

L'équation $(\mathscr{E})$ n'admet pas de solution développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$, quel que soit $R > 0$.

Partie 2 (Détermination d'une valeur approchée de $\varphi(x)$)
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \geqslant 0$. Somme des termes d'une série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} - (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}$$

Par conséquent, en multipliant par $e^{-\frac{t}{x}}$,

$$\boxed{\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}}$$

2) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions $t \mapsto t^k e^{-\frac{t}{x}}$ et $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et par croissance comparée,

$$\lim_{t\to+\infty} t^{k+2}e^{-\frac{t}{x}} = 0 \qquad \text{et} \qquad t^2\frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \sim \frac{t^{n+3}e^{-\frac{t}{x}}}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Donc ces deux fonctions sont des petits o de $1/t^2$ en $+\infty$, or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par comparaison elles sont intégrables au voisinage de $+\infty$.

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t \text{ existent}}$

Nous pouvons donc intégrer l'égalité obtenue au 1). La somme est *finie* donc par linéarité

$$\boxed{\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t}$$

3) **a)** $I_0(x) = \left[\dfrac{e^{-t/x}}{-1/x}\right]_0^{+\infty} = x.$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration par partie. Soit $u = \dfrac{t^{k+1}}{k+1}$ et $v = e^{-t/x}$. Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} uv = 0$ par croissance comparée, on peut écrire

$$I_k(x) = [uv]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1}(-1/x)e^{-t/x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x(k+1)} I_{k+1}(x)$$

Conclusion : $\boxed{I_{k+1}(x) = (k+1)xI_k(x)}$

c) *La relation de récurrence est quasiment la même qu'en partie 1, question 4a. Et pour cause : on calcule là aussi le développement en série entière de φ. Ce n'est pas choquant l'obtenir la même expression. Par contre, dans cette partie, on maîtrise le reste, i.e. l'écart entre φ et la somme partielle de la série entière.*

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad I_k(x) = k!x^{k+1}$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie d'après a).
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. $I_{k+1}(x) \overset{\text{b)}}{=} (k+1)xI_k(x) = (k+1)xk!x^{k+1} = (k+1)!x^{k+2}$. Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall k \geqslant 0 \qquad I_k(x) = k!x^{k+1}}$

Vous devez savoir faire le calcul de $I_k(x)$ sans aucune question intermédiaire : c'est un classique.

4) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 2) puis 3)c),

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(x) + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! x^{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Donc $R_n(x) = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$|R_n(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\right| \mathrm{d}t$$

Or $0 < \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ sur $[0, +\infty[$, ce qui entraine,

$$|R_n(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t = I_{n+1}(x) = (n+1)!x^{n+2}$$

Ainsi, $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ |R_n(x)| \leqslant (n+1)!x^{n+2}}$

b) $u_n \neq 0$ donc
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)!10^{n+2}}{10^{n+3}(n+1)!} = \frac{n+2}{10}$$
Donc pour tout $n \in \{0, \dots, 8\}$, $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et la suite est décroissante ($u_n > 0$).

Pour $n \geqslant 8$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ et la suite devient croissante.

Donc $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est minimale pour } n = 8}$

c) $\varphi\left(\dfrac{1}{10}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{8}(-1)^k I_k(1/10) + R_8(1/10)$, et d'après b) $|R_8(1/10)| \leqslant 4 \times 10^{-5}$.

Donc on peut obtenir $\varphi\left(\dfrac{1}{10}\right)$ avec 4 chiffres significatifs en calculant $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}(-1)^k I_k(1/10)$.

5) Soit $z \neq 0$ et $v_k = (-1)^k k! z^{k+1}$.
$$\left|\frac{v_{k+1}}{v_k}\right| = (k+1)|z| \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty > 1$$
Donc, d'après le critère de D'Alembert, $\sum |v_k|$ diverge grossièrement, donc $\sum v_k$ aussi.

Ainsi, $\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k k! z^{k+1} \text{ est } 0}$

En particulier cette série n'est pas convergente pour $z = \dfrac{1}{10}$.

On vient d'utiliser une série divergente (et pas qu'un peu divergente) pour approximer $\varphi(1/10)$....

La partie 1 montre que φ est solution de $\mathscr{E}$ et que $\mathscr{E}$ n'a pas de solution développable en série entière en 0. Donc nous savions déjà que φ n'était pas développable en série entière.

Exercice 2 (E3A PC 2020)

Cf rapport du jury, sur ma page web ou sur le site du concours.

Exercice 3 (Normes équivalentes, d'après CCP MP)

1)
- Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $(\lambda f)' = \lambda f'$,
$$\begin{aligned}\|\lambda f\| &= |\lambda f(0)| + 2\int_0^1 |\lambda f'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= |\lambda||f(0)| + 2|\lambda|\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t && \text{(linéarité de l'intégrale)} \\ &= |\lambda|\|f\|\end{aligned}$$
- Soient $(f,g) \in E^2$. Comme $(f+g)' = f' + g'$,
$$\begin{aligned}\|f+g\| &= |f(0)+g(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)+g'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant |f(0)| + |g(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)| + |g'(t)|\,\mathrm{d}t && \text{(inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale)} \\ &\leqslant \|f\| + \|g\|\end{aligned}$$
- Soit $f \in E$ telle que $\|f\| = 0$. Comme somme de termes positifs, on a $|f(0)| = 0$ et $\displaystyle\int_0^2 |f'(t)|\mathrm{d}t = 0$.
  De plus, f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, donc f' est continue sur $[0,1]$.
  Ainsi, $|f'|$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Donc, d'après le théorème sur la fonction nulle, $|f'| = 0$ sur $[0,1]$.
  Par conséquent, $f' = 0$ et f est constante sur $[0,1]$. Or $|f(0)| = 0$, donc $f(0) = 0$, puis $f = 0$.

Conclusion :

$$\boxed{\| \ \| \text{ définit une norme sur } E}$$

2) **a)** Deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que

$$\forall x \in E, \qquad C_1 N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant C_2 N_1(x)$$

b) Soit $f \in E$. Comme $\displaystyle\int_0^1 |f'(t)| \,\mathrm{d}t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \|f\|' &= 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| \,\mathrm{d}t + 3\int_0^1 |f'(t)| \,\mathrm{d}t = 2\|f\| \end{aligned}$$

De même, $|f(0)| \geqslant 0$, et

$$\begin{aligned} \|f\| &= |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)| \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant 4|f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)| \,\mathrm{d}t + 3\int_0^1 |f'(t)| \,\mathrm{d}t = 2\|f\|' \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall f \in E, \quad \frac{1}{2}\|f\| \leqslant \|f\|' \leqslant 2\|f\|$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Les deux normes } \| \ \| \text{ et } \| \ \|' \text{ sont équivalentes sur } E}$$

3) Non. Montrons que $\|.\|_1$ et $\|.\|$ ne sont pas équivalentes sur E. Soit $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in N$, les f_n sont polynomiales donc $\mathscr{C}^1$, et,

$$\begin{aligned} \|f_n\|_1 &= \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Donc, pour la norme $\|.\|_1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n = 0$: la suite converge vers la fonction nulle.

$$\|f_n\| = |f_n(0)| + \int_0^1 nx^{n-1} \,\mathrm{d}x = 1$$

Donc, pour la norme $\|.\|$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = 1 \neq 0$: la suite (f_n) ne converge pas vers la fonction nulle.
Ainsi

$$\boxed{\text{Toutes les normes sur } E \text{ ne sont pas équivalentes à la norme } \| \ \|}$$

Exercice 4 (BECEAS 2021)

1) *Si vous bloquez, il faut savoir passer à la question suivante rapidement.*
Soit $(u^{(n)}) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \ \forall n \geqslant n_0, \ \|u^{(n)} - \ell\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Montrons que $\ell \in F$, i.e. $\ell = (\ell_k)$ est une suite de limite nulle.
Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geqslant n_0$, $\|u^{(n)} - \ell\|_\infty \leqslant \varepsilon$. *(On ne l'utilisera que pour $n = n_0$)*
De plus, $u^{(n_0)} \in F$, c'est-à-dire $\lim_{k\to+\infty} u_k^{(n_0)} = 0$: Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant k_0$, $|u_k^{(n_0)}| \leqslant \varepsilon$.
Ainsi, pour tout $k \geqslant k_0$,

$$\begin{aligned}
&\ell_k = \ell_k - u_k^{(n_0)} + u_k^{(n_0)} \\
\Longrightarrow\ &|\ell_k| \leqslant |\ell_k - u_k^{(n_0)}| + |u_k^{(n_0)}| \\
&\leqslant |\ell_k - u_k^{(n_0)}| + |u_k^{(n_0)}| \\
&\leqslant \|\ell - u^{(n_0)}\|_\infty + |u_k^{(n_0)}| && \text{Car } |\ell_k - u_k^{(n_0)}| \leqslant \sup_{i\in\mathbb{N}} |\ell_i - u_i^{(n_0)}| = \|\ell - u^{(n_0)}\|_\infty \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon && \text{par construction de } n_0 \text{ et } k \geqslant k_0
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \geqslant k_0$, $|\ell_k| \leqslant 2\varepsilon$.
Finalement, $\lim_{k\to+\infty} \ell_k = 0$. Donc $\ell \in F$.
En conclusion, pour tout $(u^{(n)}) \in F^{\mathbb{N}}$ de limite ℓ, $\ell \in F$: par le critère séquentiel,

$$\boxed{F \text{ est une partie fermée de } \ell^\infty}$$

2) a)

- Soit $u \in E$: $\sum u_n$ converge. Donc le terme général tend vers 0 : $u \in F$.

$$E \subset F$$

- Soit $u = 0$ la suite identiquement nulle. $\sum 0$ converge, donc $u = 0 \in E$:

$$E \neq \emptyset$$

- Soit $\lambda \in R$, $(u, v) \in E^2$. Une combinaison linéaire de séries convergentes est convergente : $\lambda u + v \in E$.

Conclusion :

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } F}$$

b) Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 = 0$ et $u_n = \dfrac{1}{n}$. D'après Riemann, $\sum u_n$ diverge ($\alpha = 1 \geqslant 1$) : $u \notin E$.
De plus $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc $u \in F$. En conclusion,

$$\boxed{E \neq F}$$

c)

- Montrons que E n'est pas fermé dans ℓ^∞ : Soit $u \in F$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$ définissons $v^{(n)} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad v_k^{(n)} = u_k \qquad \text{et} \qquad \forall k > n, \quad v_k^{(n)} = 0$$

  Montrons que $(v^{(n)}) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $u \in F$: Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
  Comme $v^{(n)}$ est à support fini, $\sum_k v_k^{(n)}$ est une somme finie, donc convergente : $v^{(n)} \in E$.
  Par construction de $v^{(n)}$, $u - v^{(n)}$ est la suite :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad u_k - v_k^{(n)} = u_k - u_k = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall k > n, \quad u_k - v_k^{(n)} = u_k$$

  Or, $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$: soit $\varepsilon > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant k_0$, $|u_k| \leqslant \varepsilon$.

Alors, $\forall n \geqslant k_0$,

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\,, \quad |u_k - v_k^{(n)}| = 0 \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall k > n, \quad |u_k - v_k^{(n)}| = |u_k| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, $\forall n \geqslant k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $|u_k - v_k^{(n)}| \leqslant \varepsilon$. En passant à la borne supérieure sur k,

$$\forall n \geqslant k_0, \quad \|u - v^{(n)}\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k - v_k^{(n)}| \leqslant \varepsilon$$

En conclusion,

$$\lim_{n\to+\infty} v^{(n)} = u$$

<u>Conclusion</u> : Or, en reprenant la suite $u_0 = 0$ et $u_n = \dfrac{1}{n}$ de la question 2b, $u = \lim\limits_{n\to+\infty} v^{(n)} \notin E$. Par le critère séquentiel,

$$\boxed{E \text{ n'est pas un fermé de } \ell^\infty}$$

- <u>Adhérence $\overline{E}$ de E</u> : Montrons que $\overline{E} = F$.

$\boxed{\subset}$ D'après 2a, $E \subset F$, donc $\overline{E} \subset \overline{F}$. D'après 1, F est fermé, donc $\overline{F} = F$:

$$\overline{E} \subset F$$

$\boxed{\supset}$ Soit $u \in F$.
Ci-dessus, nous avons construit $(v^{(n)}) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v^{(n)} = u$. Donc $u \in \overline{E}$. Ainsi,

$$F \subset \overline{E}$$

Conclusion :

$$\boxed{\overline{E} = F}$$

3) **a)** *La suite u est bien concrète, cette question est tout à fait abordable.*

<u>Calculons $\|u\|_\infty$</u> : Soit $q \in]-1, 1]$ tel que $u_n = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $q = 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement : $u \notin E$, donc ce cas est exclu. Désormais $q \in]-1, 1[$.
Sinon, pour tout $n > 0$, $|u_n| = |q|^n < 1 = u_0$, donc

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |q|^n = 1$$

Conclusion :

$$\boxed{\|u\|_\infty = 1}$$

<u>Calculons $\|\Phi(u)\|_\infty$</u> : Soit $r = \Phi(u)$.

Par définition de Φ,

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_n &= \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} q^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} q^{n+k} \\ &= q^n \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \\ &= \frac{q^n}{1-q}\end{aligned}$$

On peut remarquer que $r = \dfrac{1}{1-q} u$,
et donc $\|r\|_\infty = \left|\dfrac{1}{1-q}\right| \|u\|_\infty = \dfrac{1}{1-q}$,
ou bien faire le calcul directement

$$\begin{aligned}\|r\|_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{q^n}{1-q}\right| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{1-q} \times |q|^n\right) \\ &= \frac{1}{1-q} \sup_{n\in\mathbb{N}} |q|^n && \text{car } \sup kA = k \sup A \text{ si } k \in \mathbb{R}_+ \text{ et } A \neq \emptyset \\ &= \frac{1}{1-q} && \text{car } \sup_{n\in\mathbb{N}} |q|^n = \|u\|_\infty = 1\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\|\Phi(u)\|_\infty = \frac{1}{1-q}}$$

b) • Montrons que $\Phi \in \mathscr{L}(E, \ell^\infty)$:
Linéarité : soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(u, v) \in E^2$ et notons $r = \Phi(u)$, $s = \Phi(v)$.
Une combinaison linéaire de série convergente est convergente, donc $t = \Phi(\lambda u + v)$ existe, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{aligned} t_n &= \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda u_k + v_k \\ &= \lambda \sum_{k=n}^{+\infty} u_k + \sum_{k=n}^{+\infty} v_k \\ &= \lambda r_n + s_n \end{aligned}$$

Donc $t = \lambda r + s$, c'est-à-dire $\Phi(\lambda u + v) = \lambda\Phi(u) + \Phi(v)$. Ainsi, Φ est linéaire.
De plus, r est de limite nulle (reste d'une série convergente), donc $r = \Phi(u) \in F \subset \ell^\infty$.
Conclusion :

$$\boxed{\Phi \text{ est linéaire de } E \text{ dans } \ell^\infty}$$

• Montrons que Φ est injective : Soit $u \in \operatorname{Ker} \Phi$: $\Phi(u) = 0$. C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = 0$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{aligned} 0 &= r_n - r_{n+1} \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \\ &= u_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \\ &= u_n \end{aligned}$$

Donc $u = 0$.
Ainsi $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$ et donc

$$\boxed{\Phi \text{ est injective}}$$

• Déterminons $\operatorname{Im} \Phi$: *On a vu comment retrouver u à partir de $r = \Phi(u)$ au point précédent.*
D'après le premier point, $\operatorname{Im} \Phi \subset F$. Montrons l'inclusion inverse.
Soit $v \in F$. Posons,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = v_n - v_{n+1}$$

Montrons que $u \in E$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} v_k - v_{k+1} \\ &= v_0 - v_{n+1} \qquad \text{(somme télescopique)} \end{aligned}$$

Comme $v \in F$, v converge vers 0, donc $\sum u_n$ converge (vers v_0) :

$$u \in E$$

Calculons $r = \Phi(u)$:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_n &= \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} v_k - v_{k+1} \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} v_k - \sum_{k=n}^{+\infty} v_{k+1} && \text{(les deux séries convergent)} \\ &= v_n && \text{(par changement d'indice)} \end{aligned}$$

Ainsi, $r = \Phi(u) = v$:

$$v \in \text{Im } \Phi$$

Donc $F \subset \text{Im } \Phi$. Par double inclusion,

$$\boxed{\text{Im } \Phi = F}$$

c) *Dans ce type de questions – rares, mais désormais potentiellement au programme :*

- *Pour montrer « f continue », on montre qu'elle est lipschitzienne : $\exists C > 0$, $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant C\|x\|$.*
- *Pour montrer « f pas continue », on cherche $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n\|$ tende vers 0, mais pas $\|f(x_n)\|$, ce qui nie la continuité en 0.*

i) Montrons que Φ n'est pas continue : Soit $(q_i) \in ([0,1[)^{\mathbb{N}}$ de limite 1. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, posons $u^{(i)} = (u_n^{(i)})_n$ la suite géométrique de raison q_i :

$$\forall n \in \mathbb{N} u_n^{(i)} = q_i^n$$

D'après 3a, $u^{(i)} \in E$ et

$$\|u^{(i)}\|_\infty = 1 \qquad \text{et} \qquad \|\Phi(u^{(i)})\|_\infty = \frac{1}{1-q_i}$$

Considérons la suite $(1-q_i)u^{(i)}$: comme $1 - q_i \geqslant 0$,

$$\|(1-q_i)u^{(i)}\|_\infty = (1-q_i)\|u^{(i)}\|_\infty = 1 - q_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} 1 - 1 = 0$$

Donc $\lim\limits_{i\to+\infty} (1-q_i)u^{(i)} = 0$. Mais, par contre

$$\begin{aligned} \|\Phi\Big((1-q_i)u^{(i)}\Big)\|_\infty &= (1-q_i)\|\Phi(u^{(i)})\|_\infty && \text{linéarité de } \Phi \text{ et } \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \\ &= (1-q_i) \times \frac{1}{1-q_i} = 1 \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{i\to+\infty} \Phi\Big((1-q_i)u^{(i)}\Big) \neq 0$ Conclusion :

$$\boxed{\text{L'application } \Psi \text{ n'est pas continue}}$$

ii) Si $v \in F$, nous avons montré que $u \in E$ définie par $u_n = v_n - v_{n+1}$ vérifie $\Psi(u) = \Phi(u) = v$.
Donc $\Psi^{-1}(v) = u$.
Montrons que Ψ^{-1} est lipschitzienne : cherchons $C > 0$ telle que $\|u\|_\infty \leqslant C\|v\|_\infty$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| &= |v_n - v_{n+1}| \\ &\leqslant |v_n| + |v_{n+1}| \\ &\leqslant \|v\|_\infty + \|v\|_\infty && \text{Par définition de } \|v\|_\infty \\ &\leqslant 2\|v\|_\infty \end{aligned}$$

Donc, en passant à la borne supérieure,

$$\|\Psi^{-1}(v)\|_\infty = \|u\|_\infty \leqslant 2\|v\|_\infty$$

Donc Ψ^{-1} est 2-lipschitzienne, et donc continue :

$$\boxed{\text{L'application } \Psi^{-1} \text{ est continue}}$$

Si on cherche au brouillon, et qu'on veut rédiger élégamment, on peut poser $\widetilde{v} \in F$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \widetilde{v}_n = v_{n+1}$$

Remarquons que $\|\widetilde{v}\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |v_{n+1}| \leqslant \|v\|_\infty$.
De plus $\Psi^{-1}(v) = v - \widetilde{v}$, et par inégalité triangulaire,

$$\|\Psi^{-1}(v)\|_\infty \leqslant \|v\|_\infty + \|\widetilde{v}\|_\infty \leqslant 2\|v\|_\infty$$

D'où conclusion.

FIN DE L'ÉPREUVE