

Épreuve de Mathématiques 8

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites
--

Exercice 1

On admet l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On définit pour tout entier naturel non nul n , $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On introduit les séries entières :

$$H(x) = \sum_{n \geq 1} h_n x^n, \quad S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} x^n \quad \text{et} \quad T(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{h_n}{n} x^n.$$

On note I l'intervalle (ouvert) de convergence de la série H .

- 1) Soit n un entier naturel non nul. Justifier que $h_{2n} - h_n \geq \frac{1}{2}$.
- 2) Démontrer que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
- 3) Déterminer le rayon de convergence de la série H . En déduire I .
- 4) Déterminer les rayons de convergence des séries S et T .
- 5) Quel est le développement en série entière de la fonction $(g : x \mapsto \ln(1-x))$? Préciser son rayon de convergence.
- 6) Justifier que la fonction $(G : x \mapsto \ln(1-x)/(1-x))$ est développable en série entière sur l'intervalle $] -1, 1[$. Etablir une relation entre G et H .

Soit L la primitive de H sur l'intervalle I telle que $L(0) = 0$.

- 7) Exprimer L à l'aide de la fonction $(g : x \mapsto \ln(1-x))$.
- 8) Justifier que L est développable en série entière et expliciter son développement en série entière. On énoncera précisément le théorème utilisé.
- 9) En déduire une relation entre $T - S$ et L .
- 10) Soit $y \in]0, 1[$.

a) Justifier que $\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u} du$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

$$\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u} du + S(y) = 0$$

On pourra utiliser le développement en série entière de la fonction $(x \mapsto \ln(1-x))$.

b) Justifier que $\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du = -\frac{\pi^2}{6}.$$

c) Justifier que

$$\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln(y) \ln(1-y).$$

11) Exprimer la valeur de $T(\frac{1}{2})$ en fonction de π . Justifier votre réponse.

Exercice 2

Notons

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$$

Partie 1 (Étude d'une équation différentielle)

On considère l'équation différentielle :

$$x^2 y' + y = x \quad (\mathcal{E})$$

- 1) Justifier l'existence de $\varphi(x)$, pour tout $x > 0$.
- 2) Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et donner, pour $x \in [a, b]$, l'expression de la dérivée $\varphi'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
- 3) En déduire que φ est classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, puis montrer que φ est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.
- 4) On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et dont la fonction somme F est solution de $(\mathcal{E})$ sur $] -R, R[$.
 - a) Déterminer une relation de récurrence liant a_n et a_{n-1} , pour tout $n \geq 2$.
 - b) Déterminer l'expression de (a_n) en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - c) Quel est le rayon de convergence de F ? Que peut-on en déduire?

Partie 2 (Détermination d'une valeur approchée de $\varphi(x)$)

Désormais, $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

- 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$, on a

$$\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$$

- 2) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence des intégrales $\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$.

En déduire que

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} dt + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$$

- 3) On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $I_k(x) = \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} dt$

- a) Calculer $I_0(x)$.
- b) Donner pour $k \in \mathbb{N}$ une relation entre $I_{k+1}(x)$ et $I_k(x)$.
- c) En déduire que $I_k(x) = k! x^{k+1}$.

- 4) On pose désormais, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k k! x^{k+1}$$

- a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| \leq (n+1)!x^{n+2}$.
- b) On suppose désormais que $x = \frac{1}{10}$, et on pose $u_n = (n+1)!(1/10)^{n+2}$. En étudiant le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que la suite (u_n) est minimale pour $n = 8$.
- c) À quelle précision peut-on obtenir une valeur de $\varphi\left(\frac{1}{10}\right)$, à l'aide des questions précédentes?
- 5) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geq 0} (-1)^k k! z^{k+1}$? Cette série est-elle convergente pour $z = \frac{1}{10}$?

Cet exercice est une illustration de la citation suivante de Henri Poincaré :

« Il y a entre les géomètres¹ et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les 20 premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment. »

Exercice 3

Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, soit M la matrice carrée d'ordre 2 définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$.

- 1) Dans cette question on choisit $a = b = -1$.
 - a) La matrice M est-elle inversible?
 - b) Calculer pour tout entier $n \geq 2$ la matrice M^n .
- 2) Dans cette question, on choisit $a = b$.
 - a) La matrice M est-elle inversible?
 - b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $M^n = (1+a)^{n-1}M$.
- 3) On revient au cas général où a et b sont des réels quelconques. Montrer que la matrice M est inversible si et seulement si $a \neq b$.
- 4) Dans cette question, on considère deux variables aléatoires discrètes X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

Soit N la matrice aléatoire définie par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ et A l'évènement « la matrice N est inversible ».

- a) Établir la relation $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k)$.
- b) Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$.
- c) En déduire $P(A)$ en fonction de q .
- 5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question on considère deux variables aléatoires discrètes X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

Soit N la matrice aléatoire définie par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ et A l'évènement « la matrice N est inversible ».

- a) Pour x réel, écrire les développements de $(x+1)^n$ et $(x+1)^{2n}$.
- b) En utilisant l'identité $(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n$, montrer que l'on a $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$.

1. L'analyse est à cette époque considérée comme une partie de la géométrie.

- c) En déduire que $P(X = Y) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$.
- d) Calculer $P(A)$ en fonction de n .

FIN DE L'ÉPREUVE