Épreuve de Mathématiques 8

Correction

Exercice 1 (E3A PSI 2016)

Partie 1 (Préliminaires) **1)** $u = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Ainsi $\boxed{|u| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$

Si $|u| \neq 0$, c'est-à-dire $\theta \neq \pi$, l'argument existe et

$$\boxed{\arg u = \begin{cases} \frac{\theta}{2}\ [2\pi] & \text{si } \theta \in [0,\pi[\\ -\frac{\theta}{2}\ [2\pi] & \text{si } \theta \in]\pi, 2\pi[\end{cases}}$$

2) **a)** Etude des cas $n = 1$ et $n = 2$ *On rappelle la factorisation suivante – toujours la série géométrique :*

$$(X^n - 1) = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1)$$

D'où l'on déduit, via $X = a/b$,

$$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

i) On pouvait aussi utiliser le binôme de Newton pour $n = 3$ et $n = 5$, en calculant les coefficients du binôme à l'aide du triangle de Pascal.

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2i}\Big((X+i)^3 - (X-i)^3\Big) \\ &= \frac{1}{2i}(X+i-X+i)((X+i)^2 + (X+i)(X-i) + (X-i)^2) \\ &= (X^2 + 2i - 1) + (X^2+1) + (X^2 - 2i - 1) \\ &= 3X^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2i}\Big((X+i)^5 - (X-i)^5\Big) \\ &= \frac{1}{2i}(X+i-X+i)\Big[(X+i)^4 + (X+i)^3(X-i) + \big((X+i)(X-i)\big)^2 \\ &\qquad + (X+i)(X-i)^3 + (X-i)^4\Big] \\ &= 2\Re\Big((X+i)^4 + (X+i)^3(X-i)\Big) + (X^2+1)^2 \\ &= 2X^4 - 12X^2 + 2 + 2(X^2-1)(X^2+1) + X^4 + 2X^2 + 1 \\ &= 5X^4 - 10X^2 + 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P_1 = 3X^2 - 1 \text{ et } P_2 = 5X^4 - 10X^2 + 1}$

ii) Comme P_1 est de degré 2 et P_2 de degré 4, $\boxed{P_1 \in \mathbb{R}_2[X] \text{ et } P_2 \in \mathbb{R}_4[X]}$

Un polynôme irréductible est un polynôme qui ne peut pas s'écrire comme un produit de polynôme non constants de degré plus petit.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ou les polynômes de degré 2 sans racines réelles. Par exemple, un polynôme de degré 4 sans racines réelles aura 4 racines complexes z_1, $\bar{z}_1$, z_2, $\bar{z}_2$, et en regroupant les racines conjuguées on l'écrit comme un produit de polynômes de degré 2.

Ainsi P_2 n'est pas irréductible car il est de degré 4, et $P_1 = (\sqrt{3}X - 1)(\sqrt{3}X + 1)$ donc n'est pas irréductible non plus.

Conclusion : $\boxed{P_1 \text{ et } P_2 \text{ ne sont pas irréductibles}}$

b) Cas général

i) P_n est différence de deux polynômes de degré $2n + 1$ et est donc de degré au plus $2n + 1$ (c'est-à-dire dans $\mathbb{C}_{2n+1}[X]$).

On développe à l'aide de la formule du binôme, en ne gardant que les termes de plus haut degré : $\binom{N}{N} = 1$ et $\binom{N}{1} = N$ si $N \in \mathbb{N}^*$. Le coefficient de X^{2n+1} dans P_n est

$$\frac{1}{2i}(1 - 1) = 0$$

et donc $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. Le coefficient de X^{2n} dans P_n est

$$\frac{1}{2i}((2n + 1)i - (2n + 1)(-i)) = 2n + 1 \neq 0$$

Ainsi,

$$\boxed{P_n \text{ est de degré } 2n \text{ et son coefficient dominant est } 2n + 1}$$

ii) Les racines N-ièmes de l'unité sont les complexes

$$\boxed{e^{\frac{2ik\pi}{N}} \quad \text{avec} \quad k \in [\![0, N - 1]\!]}$$

iii) On a

$$\boxed{P_n(i) = \frac{(2i)^{2n+1}}{2i} = 2^{2n}(-1)^n}$$

iv) Soit $a \in \mathbb{C}$. En remplaçant P_n par son expression il vient

$$\begin{aligned} P_n(a) = 0 &\iff (a + i)^{2n+1} - (a - i)^{2n+1} = 0 \\ &\iff (a + i)^{2n+1} = (a - i)^{2n+1} \end{aligned}$$

Puis, en passant au module,

$$\begin{aligned} P_n(a) = 0 &\Longrightarrow |a + i|^{2n+1} = |a - i|^{2n+1} \\ &\Longrightarrow |a + i| = |a - i| \end{aligned}$$

La dernière égalité signifie, géométriquement, que le point d'affixe a est équidistant des points d'affixes i et $-i$. Donc, en identifiant affixes et points, les racines sont sur la médiatrice du segment $[i, i]$, c'est-à-dire l'axe des réels. Conclusion :

$$\boxed{\text{Les racines de } P_n \text{ sont réelles}}$$

v) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que a soit racine de P_n. D'après iii), $P(i) \neq 0$ donc $a \neq i$, et

$$\left(\frac{a+i}{a-i}\right)^{2n+1} = 1$$

Lorsqu'on voit une barre de fraction, il faut que ce soit un réflexe : le dénominateur peut-il s'annuler ? Ce qui nous donne la raison d'être de la question iii.

Ainsi, $\dfrac{a+i}{a-i}$ est une racine $2n+1$-ième de l'unité. D'après ii, il existe $k \in [\![0, 2n]\!]$ tel que

$$\frac{a+i}{a-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$$

et donc, en développant,

$$a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$$

Il reste à écarter le cas $k = 0$: l'égalité précédente s'écrirait $a \times 0 = 2i$, ce qui est faux. Donc $k \neq 0$: $k \in [\![1, 2n]\!]$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, si $a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$ avec $k \in [\![0, 2n]\!]$, on a

$$(a+i) = (a-i)e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$$

En élevant à la puissance $2n+1$ on trouve que $(a+i)^{2n+1} = (a-i)^{2n+1}$ et donc que $P_n(a) = 0$.

Conclusion :

$$\boxed{a \text{ est racine de } P_n \iff \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)}$$

vi) D'après v), comme $e^{2ik\pi/(2n+1)} \neq 1$, les racines de P_n sont les

$$a_k = \frac{i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)}{(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1)} = i\frac{2\cos(k\pi/(2n+1))}{2i\sin(k\pi/(2n+1))} = \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

pour $k = 1, \dots, 2n$. On trouve bien des racines toutes réelles.

Pour l'instant on connaît pas la multiplicité des racines : ces racines ne sont pas forcément distinctes.

vii) On développe les deux puissances par formule du binôme et on regroupe les termes :

$$2iP_n(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k i^{2n+1-k}(1 - (-1)^{2n+1-k})$$

Les termes d'indice k impairs sont nuls : $1 - (-1)^{2n+1-k} = 0$ dans ce cas. Il reste donc

$$\begin{aligned} 2iP_n(X) &= 2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^{2k} i^{2n+1-2k} \\ &= 2i\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} X^{2k} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{P_n(X) = Q_n(X^2) \quad \text{avec} \quad Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} X^k}$$

viii) 2.a.i donne

$$\boxed{Q_1 = 3\left(X - \frac{1}{3}\right) \quad \text{racine : } \frac{1}{3}}$$

et

$$\boxed{Q_2 = 5X^2 - 10X + 1 = 5\left(X - \frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)\left(X - \frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right) \quad \text{racines :} \frac{5-2\sqrt{5}}{5}, \frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

Savoir repérer ce genre de questions, qui portent sur des objets simples que vous avez forcément calculé.

ix) Si a est racine de P_n alors a^2 est racine de Q_n. En particulier, on a les racines

$$a_k^2 = \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \quad \text{avec} \quad k \in [\![1, 2n]\!]$$

$\deg P = 2n$ donc $\deg Q = n$: il nous faut n racines (comptées avec multiplicité).
Or $\operatorname{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$ est bijective de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$ et les $2k\pi/(2n+1)$ étant dans $]0, \pi[$, les a_k sont 2 à 2 distincts. De plus, $a_k \geqslant 0$ pour $\dfrac{k\pi}{2n+1} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $k \in [\![1, n]\!]$.
Les carrés sont donc aussi distincts : Ceci donne n racines distinctes de Q_n qui est de degré n et donc toutes ses racines.

$$\boxed{\text{Les racines de } Q_n \text{ sont les } b_k = a_k^2 = \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \text{ pour } k \in [\![1, n]\!]}$$

Les racines de Q_n sont toutes de multiplicité 1.

3) Le coefficient dominant de Q_n est celui de P_n, $2n+1$. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$, or Q_n est scindé à racines simples et s'écrit

$$\begin{aligned} Q_n &= (2n+1)\prod_{k=1}^{n}(X - b_k) \\ &= (2n+1)\left(X^n - \sum_{k=1}^{n} b_k X^{n-1} + \cdots + (-1)^n b_1 \ldots b_n\right) && \text{(en développant)} \end{aligned}$$

On voit que l'on a besoin du coefficient de X^{n-1} dans Q_n qui vaut d'après viii $-\dbinom{2n+1}{2n-2}$. On a ainsi

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{2n-2} \\ &= \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{3} \\ &= \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6(2n+1)} \\ S_n &= \boxed{\frac{n(2n-1)}{3}} \end{aligned}$$

4) Pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, posons $f(x) = \sin(x) - x$ et $g(x) = x - \tan(x)$.
Ce sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ et $f'(x) = \cos(x) - 1$ et $g'(x) = -\tan^2(x)$ sur l'intervalle. Donc

x	0		$\pi/2$
$f'(x)$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	

x	0		$\pi/2$
$g'(x)$	0	$-$	
g	0	$\searrow$	

Comme $\sin \geqslant 0$ sur $[0, \pi]$, nous avons

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \ 0 \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)}$$

De plus, en excluant 0, tout est strictement positif. Or $y \mapsto \dfrac{1}{y^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc

$$\boxed{\forall x \in]0, \pi/2[, \quad \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}}$$

Obtenir la seconde série d'inégalité est faisable : il faut écrire ce qu'on a, ce qu'on veut, et essayer de passer de l'un à l'autre. Sans a priori *et en justifiant à chaque étape.*

5) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2n+1} \in]0, \pi/2[$ d'après le calcul du 2.ix. *Toujours vérifier les hypothèses avant d'appliquer un résultat.*

En remplaçant x par $\dfrac{k\pi}{2n+1}$ et en sommant, les inégalités qui précèdent s'écrivent :

$$S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leqslant n + S_n$$

ce qui donne

$$\frac{\pi^2 S_n}{(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2(n + S_n)}{(2n+1)^2}$$

Or $S_n = \dfrac{n(2n-1)}{3} \sim \dfrac{2}{3}n^2$. Donc $S_n + n \sim S_n$ et

$$\frac{\pi^2 S_n}{(2n+1)^2} \sim \frac{\pi^2}{4n^2} \times \frac{2n^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$

Les deux coté de l'encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ ont donc même limite, $\dfrac{\pi^2}{6}$: par théorème d'encadrement, la série $\sum \dfrac{1}{k^2}$ converge (ce que l'on sait car c'est une série de Riemann convergente) et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Partie 2

1) La fonction $f : t \mapsto t^s \ln(t)$ est continue donc continue par morceaux sur $]0, 1]$. *C'est une intégrale de Bertrand : question de cours.*

<u>Étude en 0</u> : posons $\alpha = \dfrac{1-s}{2} < 1$.

$$\begin{aligned} t^\alpha f(t) &= t^{\frac{1-s}{2}+s} \ln t \\ &= t^{\frac{s+1}{2}} \ln t \end{aligned}$$

Or $s + 1 > 0$ donc par croissance comparée $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha f(t) = 0$. Par conséquent,

$$t^s \ln(t) = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ est convergente d'après Riemann : $\alpha < 1$.

On a donc intégrabilité au voisinage de 0 et

$$\boxed{J_s \text{ existe}}$$

Effectuons une intégration par partie. Comme, par croissance comparée ($s+1>0$),

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^{s+1}}{s+1}\ln(t) = 0$$

et que J_s converge absolument, la seconde intégrale converge aussi d'après le théorème d'intégration par partie et

$$J_s = \left[\frac{t^{s+1}}{s+1}\ln(t)\right]_0^1 - \frac{1}{s+1}\int_0^1 t^s \,\mathrm{d}t$$

Conclusion,

$$\boxed{J_s = -\frac{1}{(s+1)^2}}$$

Pour ceux qui préfèrent, vous pouvez intégrer de $\varepsilon > 0$ à 1 puis passer à la limite à la fin. Vous prouvez ainsi et l'existence de J_s et sa valeur.

2) **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $f \ : \ t \mapsto \dfrac{t^x \ln(t)}{(t-1)}$ est continue donc continue par morceaux sur $]0,1[$.

Étude en 0 : Équivalent :

$$f(t) \sim_0 -t^x \ln(t)$$

Cas $x > -1$: $-J_x$ est absolument convergente d'après 1, donc par comparaison f est intégrable au voisinage de 0.

Cas $x \leqslant -1$: $tf(t) \sim -t^{x+1}\ln t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\dfrac{1}{t} = o\left(f(t)\right)$.

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (Riemann), donc par comparaison (de fonctions *positives*) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ aussi.

Or f est positive, donc $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Étude en 1 : Posons $t = 1-h$ *(on est à gauche de h, d'où le $-$, mais vous pouvez poser $t = 1+h$ avec $h<0$).*

$$f(1-h) = \frac{(1-h)^x \ln(1-h)}{-h} \sim 1 \times (-h) - h = 1$$

Donc f est prolongeable par continuité en 1 par la valeur 1.

Conclusion : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > -1$, c'est-à-dire

$$\boxed{D_H =]-1,+\infty[}$$

b) Soit $-1 < x \leqslant y$. Comme $\ln \leqslant 0$ sur $]0,1]$,

$$\begin{array}{llr}
\forall t \in]0,1[, & x\ln(t) \geqslant y\ln(t) & \\
\Longrightarrow \forall t \in]0,1[, & t^x = e^{x\ln(t)} \geqslant e^{y\ln(t)} = t^y & \text{Par croissance de l'exponentielle} \\
\Longrightarrow \forall t \in]0,1[, & \dfrac{t^x\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t \geqslant \dfrac{t^y \ln(t)}{t-1} & \text{Car } \dfrac{\ln(t)}{t-1} \geqslant 0 \\
\Longrightarrow & \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \frac{t^y\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t & \text{Par croissance de l'intégrale}
\end{array}$$

Ainsi,

$$\boxed{H \text{ est décroissante sur } D_H}$$

c) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t^\alpha(\ln(t))^2}{1-t}$ est continue sur $]0,1[$.
Étude en 0 : $f(t) \sim (t^{\alpha/2}\ln(t))^2$.
Par croissance comparée, comme $\alpha > 0$, nous avons $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$ et f est prolongeable par continuité en $t = 0$.
Étude en 1 : de même qu'en a),

$$f(1-h) = \frac{(1-h)^\alpha(\ln(1-h))^2}{h} \sim \frac{h^2}{h} = h$$

Donc $\lim\limits_{t\to 1} f(t) = 0$ et f est prolongeable par continuité en $t = 1$.
Ainsi, f est prolongeable en une fonction continue sur le *segment* $[0,1]$, qui sera donc bornée et atteindra ses bornes sur ce segment.

$$\boxed{f \text{ est donc prolongeable en une fonction bornée sur } [0,1]}$$

d) On utilise le théorème de dérivation sous le signe somme.
Soit $\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\varphi(t) = \frac{t^a(\ln t)^2}{1-t}$$

Montrons que φ est intégrable sur $]0,1[$.
Comme $a > -1$, $\alpha = \dfrac{a+1}{2} > 0$ et, d'après 2c, $t^{\frac{1-a}{2}}\varphi(t) = \dfrac{t^\alpha(\ln(t))^2}{1-t}$ est bornée sur $]0,1[$:

$$\forall t \in]0,1[, \qquad |\varphi(t)| \leqslant \frac{M}{t^{\frac{1-a}{2}}} \qquad \text{avec} \qquad M \geqslant 0 \text{ fixé}$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1-a}{2}}}\,\mathrm{d}t$ converge d'après Riemann : $\dfrac{1-a}{2} < 1$.
Donc, par majoration, φ est intégrable sur $]0,1[$.
Posons $I =]0,1[$, $D = [a,+\infty[$ et

$$\forall (x,t) \in D \times I, \qquad h(x,t) = \frac{t^x \ln(t)}{t-1}$$

- $\forall t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur D car exp est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in D$, $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur I d'après a).
  $\forall x \in D$, $\dfrac{\partial h}{\partial x} : t \mapsto \dfrac{t^x(\ln(t))^2}{t-1}$ est continue donc continue par morceaux sur $]0,1[$.
- La fonction φ définie ci-dessus est positive, intégrable sur I et

$$\forall (x,t) \in D \times I, \qquad \left|\frac{t^x(\ln(t))^2}{t-1}\right| \leqslant \frac{t^a(\ln(t))^2}{t-1} = \varphi(t)$$

Le théorème s'applique et indique que H est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ avec

$$\forall x \in D, \qquad H'(x) = \int_0^1 \frac{t^x(\ln(t))^2}{t-1}\,\mathrm{d}t$$

Or ce résultat est valable pour tout $a > -1$, donc

$$\boxed{H \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \bigcup_{a>-1} [a,+\infty[= D_H}$$

De plus la fonction intégrée est négative, donc $H'(x)$ est négative pour tout $x \in]-1,+\infty[$ et on retrouve la décroissance de H.

e) Soit $x > 0$. La fonction $g\ :\ t \mapsto \dfrac{t\ln(t)}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur 0) et 1 (valeur 1). Elle donc prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée et atteignant ses bornes. Ainsi $\|g\|_\infty = \sup\limits_{t\in]0,1[} |g(t)|$ existe. En majorant, il vient

$$\forall x > 0,\ |H(x)| \leqslant \|g\|_\infty \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\|g\|_\infty}{x}$$

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} H(x) = 0}$$

et en particulier (caractérisation séquentielle) que $H(x_n) \to 0$ si $x_n \to +\infty$.
Remarque : l'énoncé veut nous faire utiliser le théorème de convergence dominée pour étudier $(H(x_n))$ puis conclure pour la limite continue par caractérisation séquentielle.

f) On a, d'après 1),

$$H(x) - H(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x(1-t)\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t = -J_x = \frac{1}{(x+1)^2}$$

g) H étant continue en 0 (et même dérivable),

$$H(x+1) \xrightarrow[x\to-1]{} H(0)$$

Donc, d'après 2f, au voisinage de -1,

$$H(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + H(0) + o(1) \sim \frac{1}{(x+1)^2}$$

Ainsi,

$$\boxed{H(x) \underset{x\to-1}{\sim} \frac{1}{(x+1)^2}}$$

h) **i)** On a $\dfrac{1}{(x+k)^2} \sim \dfrac{1}{k^2}$ qui est le terme d'une série positive convergente (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

ii) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n :\quad H(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: est vraie d'après 2f.
- $\underline{\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned}
H(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n) && \mathcal{H}_n\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + \frac{1}{(x+n+1)^2} + H(x+n+1) && \text{D'après 2f en } x+n\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n+1)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1\quad H(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)}$

iii) Comme H est de limite nulle en $+\infty$ d'après 2e et comme la série converge, on peut faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir

$$\boxed{H(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}}$$

iv) En particulier

$$H(0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$H(1)=H(0)-1=\frac{\pi^2}{6}-1$$

Partie 3

1) $h_x\ :\ t\mapsto\dfrac{1}{(x+t)^2}$ décroît sur $]-x,+\infty[$ et donc sur $]1,+\infty[$. On en déduit que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ h_x(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}h_x(t)\,\mathrm{d}t\leqslant h_x(k)$$

c'est à dire

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(x+k+1)^2}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{(x+t)^2}\leqslant\frac{1}{(x+k)^2}}$$

2) Sommons ces inégalités pour $k\in[\![1,n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k+1)^2}\leqslant\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{(x+t)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k)^2}$$

Or $\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{(x+t)^2}=\left[-\frac{1}{t+x}\right]_{t=1}^{t=n+1}=-\frac{1}{n+1+x}+\frac{1}{1+x}.$
Tous les termes admettent une limite quand $n\to+\infty$ (pour les séries, elles sont équivalentes à des séries de Riemann avec $\alpha=2>1$) et le passage à la limite donne

$$H(x)-\frac{1}{(x+1)^2}\leqslant\frac{1}{1+x}\leqslant H(x)$$

ou encore

$$\frac{1}{1+x}\leqslant H(x)\leqslant\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}$$

Donc

$$\frac{x}{x+1}\leqslant xH(x)\leqslant\frac{x}{x+1}+\frac{x}{(1+x)^2}$$

Majorant et minorant ont pour limite 1 lorsque $x\to+\infty$, on en déduit par encadrement que

$$\boxed{H(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}}$$

3) **a)** $H\geqslant 0$ comme intégrale d'une fonction positive, donc par comparaison de séries positives,

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\geqslant 0$$

- D'après 2, $H(n)\sim\dfrac{1}{n}$, or $\sum\dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc

$$\boxed{\sum u_n\text{ diverge}}$$

- Vérifions le critère des séries alternées :

- D'après ci-dessus, $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 0$, donc $((-1)^n u_n)$ est alternée.
- $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ (d'après l'équivalent de (u_n)).
- (u_n) est décroissante en module car H est décroissante.

D'après le critère des séries alternées,

$$\boxed{\sum(-1)^n u_n \text{ converge}}$$

Il faut commencer simplement : valeurs absolues, équivalent... mais dans ce cas on retombe sur u_n, donc ce n'est pas absolument convergent : il ne nous reste plus que le CSA, directement ou indirectement.

b) Soit $t \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} f_k(t) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{t^k \ln(t)}{t-1}\\ &= \frac{\ln(t)}{t-1}\sum_{k=0}^{n}(-t)^k && \text{on reconnaît une série géométrique de raison} q=-t\neq 1\\ &= \frac{\ln(t)}{t-1}\times\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\end{aligned}$$

Donc en passant aux valeurs absolues, avec $t-1<0$ et $0<t<1$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(t)\right| \leqslant \frac{(1+t^{n+1})|\ln(t)|}{(1-t)(1+t)} \leqslant \frac{2|\ln(t)|}{1-t^2}$$

c) *Nous ne pouvons pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme (sans convergence uniforme) car nous avons besoin du caractère alterné pour obtenir la convergence de $\sum \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.*

La fonction f_n est intégrable sur $]0,1[$, et $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n u_n$.
De plus, à la question 3b nous avons reconnu une série géométrique, de raison $q=-t\in]-1,1[$, donc $\sum f_n$ converge simplement et

$$\forall t\in]0,1[,\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \frac{\ln(t)}{t^2-1}$$

- $\forall n\in\mathbb{N}$, $g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$.
- $(g_n)_n$ converge simplement sur $]0,1[$ et sa est $g : t\mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}$ continue par morceaux sur $]0,1[$.
- D'après 3b, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in]0,1[$,

$$|g_n(t)| \leqslant \frac{2|\ln(t)|}{1-t^2}$$

Le majorant est continu sur $]0,1[$, prolongeable par continuité en 1 (valeur 1) et $o(1/\sqrt{t})$ au voisinage de 0 (équivalent à $\ln(t)$). Il est donc intégrable sur $]0,1[$.

Par théorème de convergence dominée, on a

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t}$$

d) La fonction $v \mapsto v^2$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0,1[$ dans lui-même, d'après le théorème de changement de variable ($u = v^2$) les intégrales convergent et

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(v)}{v^2-1}\,\mathrm{d}v = \int_0^1 \frac{\ln(\sqrt{u})}{u-1}\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{4}H\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

Partie 4 (Développement en série entière de la fonction H)

1) **a)** Sous réserve d'existence, le théorème d'intégration par parties donne

$$I_{p,q} = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(\ln(t))^q\right]_0^1 - \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^p \ln(t)^{q-1}\ \mathrm{d}t$$

Le crochet est de limite nulle en 0 (croissances comparées) et ceci légitime l'intégration par parties et donc

$$\boxed{I_{p,q} = -\frac{q}{p+1}I_{p,q-1}}$$

b) *Une question simple : on vous donne une formule de récurrence, il faut déterminer la formule en fonction de p et q. Vous testez pour les premier termes, vous conjecturez (toujours au brouillon) puis vous montrez par récurrence. C'est toujours sur le même modèle, et il n'est pas du tout nécessaire d'avoir fait ou compris les questions précédentes.*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_q : \quad I_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$$

est vraie pour tout $q \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $I_{p,0} = \int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1} = \frac{(-1)^0 0!}{(p+1)^{0+1}}$. Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_q \Longrightarrow \mathcal{H}_{q+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_q$ vraie. D'après ii),

$$I_{p,q+1} = -\frac{q+1}{p+1}I_{p,q} = -\frac{q+1}{p+1}\frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}} = \frac{(-1)^{q+1}(q+1)!}{(p+1)^{q+2}}$$

  Donc $\mathcal{H}_{q+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall q \geqslant 0 \qquad I_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}}$

2) **a)** La fonction $t \mapsto \frac{(\ln(t))^{n+1}}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$,

$$\frac{(\ln(t))^{n+1}}{t-1} \sim_0 \ln^{n+1}(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

par croissance comparée, et prolongeable par continuité en 1 (développement limité) :

$$\frac{(\ln(1-h))^{n+1}}{-h} \sim_0 (-h)^n$$

C'est donc une fonction intégrable sur $]0,1[$ et

$$\boxed{B_n \text{ existe}}$$

b) On sait que

$$\forall t \in]0,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k$$

Posons donc $g_k\ :\ t \mapsto \ln(t)^{n+1}t^k$ (n est fixé).

- Les g_k sont toutes continues par morceaux sur $]0,1[$.
- $\sum(g_k)$ converge simplement sur $]0,1[$ et sa somme est $t \mapsto \dfrac{(\ln(t))^{n+1}}{t-1}$ qui est continue donc continue par morceaux sur $]0,1[$.
- $\displaystyle\int_0^1 |g_k(t)|\,\mathrm{d}t = (-1)^{n+1}\int_0^1 g_k(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{n+1} I_{k,n+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)^{n+2}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente car $n+2 \geqslant 2 > 1$.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et donne

$$\boxed{B_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 g_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} I_{k,n+1}}$$

c) Avec la question 1, on en déduit (avec changement d'indice) que

$$\boxed{B_n = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)^{n+2}} = (-1)^{n+1}(n+1)!Z_{n+2}}$$

3) Avec le DSE de l'exponentielle, de rayon infini, on a

$$\forall x > -1, \qquad H(x) = \int_0^1 \frac{e^{x\ln(t)}\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\ln(t))^{k+1}}{t-1}\frac{x^k}{k!}\,\mathrm{d}t$$

Fixons $x \in]-1,1[$ et notons $h_k \ :\ t \mapsto \dfrac{(\ln(t))^{k+1}}{t-1}\dfrac{x^k}{k!}$.

- Les h_k sont continues sur $]0,1[$.
- $\sum h_k$ converge simplement sur $]0,1[$ et sa somme est $t \mapsto \dfrac{t^x\ln(t)}{t-1}$ qui est continue par morceaux sur $]0,1[$.
- On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0,1[, \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} h_k(t)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}|h_k(t)| = \frac{t^{-|x|}|\ln(t)|}{|t-1|}$$

Comme $|x|<1$, $-|x| > -1$ et le majorant est intégrable sur $]0,1[$.

On peut appliquer le théorème de convergence dominée pour intervertir somme et intégrale et conclure que

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(k+1)Z_{k+2}x^k}$$

4) D'après 3, le rayon de convergence R est au moins égal à 1 (l'égalité étant valable sur $]-1,1[$).
Si, par l'absurde, $R>1$, la somme de la série entière serait continue en -1 et H admettrait une limite finie en -1 ce qui est faux d'après partie 2, 2g : $R \leqslant 1$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence vaut 1}}$$

C'est la meme méthode que pour le rayon de $\sum c_n z^n$.

Exercice 2 (E3A MP 2018)

1) a) Pour tout événement ω , $U_2(\omega) = |\{X_1(\omega), X_2(\omega)\}|$ et selon que $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$ soient égaux ou non , on a : $U_2(\omega)=1$ ou $U_2(\omega)=2$. Conclusion

$$\boxed{U_2(\Omega) = \{1,2\}}$$

b) On a : $(U_2 = 1) = (X_1 = X_2)$.
Considérons le système complet d'événements $(X_1 = k)_{k\in X_1(\Omega)}$, où $X_1(\Omega) = [\![1, \ell]\!]$.
La formule des probabilités totales s'écrit alors :

$$\begin{aligned} P(U_2 = 1) &= P(X_1 = X_2) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} P(X_1 = k, X_1 = X_2) && \text{Formule des probabilités totales} \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} P(X_1 = k, X_2 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{\ell^2} && \text{Par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{P(U_2 = 1) = \frac{1}{\ell}}$$

Avec le (a), on en déduit que $\boxed{P(U_2 = 2) = 1 - \frac{1}{\ell}}$

c) On a $\mathbf{E}(U_2) = 1 \times \frac{1}{\ell} + 2 \times (1 - \frac{1}{\ell}) = 2 - \frac{1}{\ell}$ d'où

$$\boxed{\mathbf{E}(U_2) = 2 - \frac{1}{\ell}}$$

2) On a $\boxed{U_n(\Omega) = [\![1, \min(n, \ell)]\!]}$

3) On a : $(X_i \in S) = \bigcup_{s\in S} (X_i = s)$ (réunion disjointe) , comme $P(X_i = s) = \frac{1}{\ell}$ (loi uniforme) on conclut :

$$\boxed{P(X_i \in S) = \frac{|S|}{\ell}}$$

4) On a : $(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a) = \bigcap_{i=1}^{n-1} (X_i \neq a)$ et comme les X_i sont indépendantes, on conclut à l'aide du 3 pour $S = \{1, \ldots, \ell\} - \{a\}$:

$$\boxed{P(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a) = \Big(\frac{\ell - 1}{\ell}\Big)^{n-1}}$$

5) Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet $(X_n = a)_{a\in\{1,\ldots,\ell\}}$:

$$\begin{aligned} P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) &= \sum_{a=1}^{\ell} P\Big((X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) \cap (X_n = a)\Big) \\ &= \sum_{a=1}^{\ell} P(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a, X_n = a) \\ &= \sum_{a=1}^{\ell} P(X_1 \neq a) \ldots P(X_{n-1} \neq a) P(X_n = a) && \text{Par indépendance des } X_i \end{aligned}$$

On a donc

$$P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{a=1}^{\ell} \Big(\frac{\ell - 1}{\ell}\Big)^{n-1} \times \frac{1}{\ell} = \Big(\frac{\ell - 1}{\ell}\Big)^{n-1} \times \frac{\ell}{\ell}$$

Conclusion :

$$\boxed{P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \Big(\frac{\ell - 1}{\ell}\Big)^{n-1}}$$

6) On a $(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \bigcup_{S \in \mathcal{P}_\ell} \Big(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S\Big) \cap (X_n \notin S)$ (réunion disjointe), donc

$$P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P\Big((\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S) \cap (X_n \notin S)\Big)$$

$(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S)$ et $(X_n \notin S)$ sont indépendants, on en déduit que

$$P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P\Big(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S\Big) P\Big((X_n \notin S)\Big)$$

On conclut avec le 3. :

$$\boxed{P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P\Big(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S\Big)\Big(\frac{\ell - |S|}{\ell}\Big)}$$

7) On partitionne $\mathcal{P}_\ell$ à cardinal constant :

$$\sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P\Big(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S\Big)\Big(\frac{\ell - |S|}{\ell}\Big) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell, |S| = k} P\Big(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S\Big)\Big(\frac{\ell - k}{\ell}\Big)$$

or $\displaystyle\sum_{S \in \mathcal{P}_\ell, |S| = k} P\Big(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S\Big) = P(U_{n-1} = k)$. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P\Big(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S\Big)\Big(\frac{\ell - |S|}{\ell}\Big) &= \sum_{k=1}^{\ell} P(U_{n-1} = k)\Big(\frac{\ell - k}{\ell}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} P(U_{n-1} = k)\Big(1 - \frac{k}{\ell}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} P(U_{n-1} = k) - \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} k P(U_{n-1} = k) \\ &= 1 - \frac{1}{\ell} \mathbf{E}(U_{n-1}) \end{aligned}$$

Avec le 6 , on a donc $1 - \frac{1}{\ell}\mathbf{E}(U_{n-1}) = P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n)$.
Conclusion $\boxed{\mathbf{E}(U_{n-1}) = \ell(1 - P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n))}$

8) Avec le 5 et le 7, on a directement que $\mathbf{E}(U_{n-1}) = \ell\Big(1 - (1 - \frac{1}{\ell})^{n-1}\Big)$ d'où en décalant :

$$\boxed{\mathbf{E}(U_n) = \ell\Big(1 - (1 - \frac{1}{\ell})^n\Big)}$$

9) La suite géométrique $((1 - \frac{1}{\ell})^n)$ est de raison q avec $0 < q < 1$, on en déduit immédiatement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbf{E}(U_n) = \ell}$$

Intuitivement, si n est très grand par rapport à ℓ alors pour chaque valeur de $[\![1, \ell]\!]$ l'une des X_i prendra cette valeur et donc toutes les valeurs de $[\![1, \ell]\!]$ seront atteintes et on aura $U_n = \ell$ presque à chaque tirage.

10) De l'équivalent $1 - (1 - x)^\alpha \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$, on en déduit que $\mathbf{E}(U_n) \underset{\ell \to +\infty}{\sim} \ell \times \frac{n}{\ell}$. On en conclut :

$$\boxed{\lim_{\ell \to +\infty} \mathbf{E}(U_n) = n}$$

Intuitivement, si ℓ est très grand face à n , les $X_1, \dots, X_n$ se placeront sur n valeurs du grand intervalle $[\![1, \ell]\!]$ et ces valeurs seront certainement 2 à 2 distinctes.

11) **a)** Ici $\ell = 365$ et la i-ème personne est représentée par la variable X_i. Le nombre moyen de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes est donc U_n avec $\ell = 365$.

Conclusion $\boxed{\text{Ce nombre moyen est donc égal à } \mathbf{E}(U_n) = 365\Big(1 - (\frac{364}{365})^n\Big)}$

b) On a immédiatement avec le 9 , $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(U_n) = 365}$.

FIN DE L'ÉPREUVE