

Épreuve de Mathématiques 8

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Partie 1 (Préliminaires)
Soit n un entier naturel non nul.

1) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Déterminer, s'ils existent, module et argument du nombre complexe $u = 1 + e^{i\theta}$.

2) On note P_n le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right)$$

a) Etude des cas $n = 1$ et $n = 2$

- **i)** Déterminer les polynômes P_1 et P_2.
- **ii)** Vérifier que $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et que $P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$. Sont-il irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$?

b) Cas général

- **i)** Montrer que $P_n \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. Donner son degré et son coefficient dominant.
- **ii)** Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression des racines N-ièmes de l'unité.
- **iii)** Calculer $P_n(i)$.
- **iv)** Prouver par un argument géométrique que les racines de P_n sont réelles.
- **v)** Soit $a \in \mathbb{C}$. prouver l'équivalence

$$a \text{ est racine de } P_n \iff \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$$

- **vi)** Déterminer les racines du polynôme P_n. Vérifier alors le résultat de 2.b.iv.
- **vii)** En développant P_n, déterminer un polynôme Q_n de degré n et à coefficients réels tel que

$$P_n(X) = Q_n(X^2)$$

On admettra l'unicité du polynôme Q_n ainsi obtenu.

- **viii)** Expliciter Q_1 et Q_2 et déterminer leurs racines respectives.
- **ix)** Déterminer les racines de Q_n en fonction de celles de P_n.

3) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$. En utilisant des résultats obtenus à la question précédente, montrer que $S_n = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.

4) Prouver les inégalités suivantes

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$$

En déduire que

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

5) Justifier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ et calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Partie 2

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, lorsque cela a un sens, $H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$.

1) Démontrer que pour $s > -1$, l'intégrale $J_s = \displaystyle\int_0^1 t^s \ln(t)\,\mathrm{d}t$ existe et donner sa valeur.

Indication : *On pourra multiplier $t^s \ln t$ par t^α avec $\alpha = \dfrac{1-s}{2}$.*

2) Etude de la fonction H

- **a)** Montrer que l'ensemble de définition de la fonction H est $D_H =]-1, +\infty[$.
- **b)** Montrer que H est monotone sur D_H.
- **c)** Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^\alpha (\ln(t))^2}{1-t}$ est prolongeable en une fonction bornée sur le segment $[0, 1]$.
- **d)** Démontrer que H est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ avec $a > -1$, puis sur D_H. Retrouver alors la monotonie de H.
- **e)** Soit (x_n) une suite réelle de limite $+\infty$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H(x_n)$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x)$.
- **f)** Démontrer que

$$\forall x > -1,\ H(x) - H(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

- **g)** Déterminer alors un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.
- **h)** Soit $x > -1$.
  - **i)** Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{(x+k)^2}$.
  - **ii)** Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)$$

  - **iii)** En déduire que

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$

  - **iv)** Calculer $H(0)$ et $H(1)$.

Partie 3

1) Prouver que pour tout $x > -1$ et tout entier naturel k non nul,

$$\frac{1}{(x+k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{(x+t)^2} \leqslant \frac{1}{(x+k)^2}$$

2) Déterminer un équivalent de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3) pour tout entier naturel n, on pose $u_n = H(n)$.

a) Etudier la convergence des séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,1[$, on pose $f_n(t) = (-1)^n \dfrac{t^n \ln(t)}{t-1}$. Montrer que

$$\forall t \in]0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(t)\right| \leqslant \frac{2|\ln t|}{(1-t^2)}$$

c) Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\ln(v)}{v^2-1}\,\mathrm{d}v$$

d) Donner la valeur de cette intégrale en fonction de $H\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

Partie 4 (Développement en série entière de la fonction H)
Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on note

$$Z_k = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^k}$$

1) Pour tout couple d'entiers naturels (p,q), on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p[\ln(t)]^q\,\mathrm{d}t$ et on admettra que cette intégrale existe.

a) Justifier que si $q \geqslant 1$, $I_{p,q} = -\dfrac{q}{p+1} I_{p,q-1}$.

b) En déduire la valeur de $I_{p,q}$.

2) **a)** Justifier l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $B_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{[\ln(t)]^{n+1}}{t-1}\,\mathrm{d}t$.

b) Exprimer B_n à l'aide des intégrales $I_{p,q}$.

c) Prouver enfin que $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = (-1)^n(n+1)!Z_{n+2}$.

3) En déduire alors que

$$\forall x \in]-1,1[,\ H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(k+1)Z_{k+2}x^k$$

4) Préciser alors le rayon de convergence de la série entière obtenue à la question précédente.

Exercice 2

Soient a et b des entiers naturels tels que $a \leqslant b$. On rappelle que $[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leqslant k \leqslant b$.

Si S est un ensemble fini, on note $|S|$ son cardinal.

Si X est une variable à valeur dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $E(X)$ son espérance.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit ℓ un entier naturel non nul. Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1,\ell]\!]$.

On note U_n le nombre de valeurs distinctes prises par les variables $X_1,\dots,X_n$: si $k_1,\dots,k_n$ sont les valeurs prises respectivement par $X_1,\dots,X_n$, alors U_n prend la valeur $|S|$ où $S = \{k_1,\dots,k_n\}$ pour tout $(k_1,\dots,k_n) \in [\![1,\ell]\!]^n$.

Si S est une partie de $[\![1,\ell]\!]$, on note $\{X_1,\dots,X_n\} = S$ la réunion des événements $(X_1,\dots,X_n) = (k_1,\dots,k_n)$ pour tout $(k_1,\dots,k_n) \in [\![1,\ell]\!]^n$ tels que $S = \{k_1,\dots,k_n\}$.

1) On suppose dans cette question seulement que $n = 2$ et $\ell \geqslant 2$.

a) Justifier que U_2 ne prend que les valeurs 1 et 2.

b) Calculer $P(U_2 = 1)$ et $P(U_2 = 2)$.

c) Calculer $E(U_2)$.

2) Quel est l'ensemble des valeurs prises par U_n ?

3) Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Soit S une partie de $[\![1, \ell]\!]$. Quelle est la probabilité de l'événement $(X_i \in S)$ en fonction de $|S|$?

4) Soit a dans $[\![1, \ell]\!]$. Exprimer $P(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a)$, la probabilité qu'aucune des variables $X_1, \ldots, X_{n-1}$ ne prenne la valeur a, en fonction de n et ℓ.

5) En déduire $P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n)$, la probabilité que la valeur prise par X_n soit différente de toutes les valeurs prises par les autres variables, en fonction de n et ℓ.

6) Justifier

$$P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S) \left(\frac{\ell - |S|}{\ell} \right)$$

où $\mathcal{P}_\ell$ désigne l'ensemble des parties non vides de $[\![1, \ell]\!]$.

On admettra que l'indépendance des X_i entraîne celle de $(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S)$ et de $(X_n \notin S)$.

7) En déduire dans le cas où $n \geqslant 3$:

$$E(U_{n-1}) = \ell(1 - P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n))$$

8) Exprimer $E(U_n)$ en fonction de n et ℓ.

9) Déterminer la limite de $E(U_n)$ lorsque ℓ est fixé et $n \to +\infty$. Interprétez votre résultat.

10) Déterminer la limite de $E(U_n)$ lorsque n est fixé et $\ell \to +\infty$. Interprétez votre résultat.

11) On s'intéresse aux possibles partages de dates d'anniversaire dans un groupe de n personnes. On suppose que les années sont toutes de 365 jours et que les dates d'anniversaire sont uniformément réparties sur chaque jour de l'année. On fait aussi l'hypothèse que les dates d'anniversaire de n personnes choisies au hasard sont indépendantes mutuellement.

Soit D_n le nombre de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes choisies au hasard.

a) Exprimer en fonction de n le nombre moyen de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes, c'est à dire $E(D_n)$.

b) Quelle est la limite de ce nombre moyen lorsque n tend vers $+\infty$.

FIN DE L'ÉPREUVE